Beispiele 5.7: 1. $3i + 7i - 8i = 2i$,

2. $5i \cdot 6i = -30$,

3. $\frac{7}{i} = -7i$.

5.3.2. Komplexe Zahlen

D.5.4 **Definition 5.4:** *Die Summe einer reellen und einer rein imaginären Zahl heißt* **komplexe** *Zahl z, $z = a + bi$, a, b reell. Dabei nennt man a den* **Realteil** *und b den* **Imaginärteil** *von z und schreibt auch $a = \mathrm{Re}(z)$, $b = \mathrm{Im}(z)$.*

Für $b = 0$ erhalten wir eine reelle, für $a = 0$ und $b \neq 0$ eine rein imaginäre Zahl. Die Zahl $\bar{z} = a - bi$ heißt die zu z *konjugiert komplexe* Zahl.

Wir erklären die Gleichheit zweier komplexer Zahlen folgendermaßen:

D.5.5 **Definition 5.5:** *Zwei komplexe Zahlen sind gleich, wenn sowohl die Real- als auch die Imaginärteile übereinstimmen, d. h. $a_1 + b_1 i = a_2 + b_2 i \leftrightarrow (a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2)$.*

Ferner gelten die Grundgesetze der

Reflexivität; $z = z$,

Symmetrie: Aus $z_1 = z_2$ folgt $z_2 = z_1$ und

Transitivität: Aus $z_1 = z_2$ und $z_2 = z_3$ folgt $z_1 = z_3$.

Insbesondere bedeutet $z = 0$, daß $a = b = 0$ ist.

Die Grundgesetze der Arithmetik werden mit Ausnahme der Gesetze für Ungleichungen, also der Ordnung und Monotonie, von den reellen Zahlen übernommen. Bei Berücksichtigung von $i^2 = -1$ ergibt sich mit $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ für

die Summe $z_1 + z_2 = (a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\, i$,

die Differenz $z_1 - z_2 = (a_1 + b_1 i) - (a_2 + b_2 i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)\, i$,

das Produkt $z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

und den Quotienten (5.7)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{(a_1 + b_1 i)(a_2 - b_2 i)}{(a_2 + b_2 i)(a_2 - b_2 i)}$$

$$= \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i, \quad z_2 \neq 0.$$

Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier komplexer Zahlen sind demnach wieder komplex.

Ferner gelten die Gesetze:

$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (*Kommutativität der Addition*);

$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$ (*Assoziativität der Addition*);

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (*Kommutativität der Multiplikation*);

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (*Assoziativität der Multiplikation*);

$(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ (*Distributivität*).