Entsprechend lassen sich die Grundgesetze für die Subtraktion und Division bei Beachtung der obigen Festlegungen für Differenz und Quotient zweier komplexer Zahlen übernehmen.

Wir sehen den Bereich der komplexen Zahlen als eine Erweiterung des Bereichs der reellen Zahlen an. Bei den komplexen Zahlen wird mit Ausnahme der Ungleichheitsbeziehung auf der Grundlage derselben arithmetischen Axiome gerechnet wie bei den reellen Zahlen. Andererseits lassen sich mit Hilfe der komplexen Zahlen Aufgaben bewältigen, wie die Lösung der Gleichung $x^2 + 1 = 0$, die im reellen Zahlenbereich nicht lösbar sind.

Beispiele 5.8:

1. $$z_1 = 3 + 4\mathrm{i}, \quad z_2 = 1 - 2\mathrm{i};$$

$$z_1 + z_2 = 4 + 2\mathrm{i} = 2 \cdot (2 + \mathrm{i}); \qquad z_1 - z_2 = 2 + 6\mathrm{i} = 2 \cdot (1 + 3\mathrm{i});$$

$$z_1 \cdot z_2 = (3 + 4\mathrm{i}) \cdot (1 - 2\mathrm{i}) = (3 + 8) + (4 - 6)\,\mathrm{i} = 11 - 2\mathrm{i};$$

$$z_1 : z_2 = \frac{3 + 4\mathrm{i}}{1 - 2\mathrm{i}} \cdot \frac{1 + 2\mathrm{i}}{1 + 2\mathrm{i}} = \frac{3 - 8}{5} + \frac{6 + 4}{5}\mathrm{i} = -1 + 2\mathrm{i}.$$

Wir beachten: Zähler und Nenner des Quotienten werden mit der konjugiert komplexen Zahl des Nenners multipliziert! Diese Regel kann bei jeder derartigen Division verwendet werden.

$$z_2^2 = (1 - 2\mathrm{i})^2 = 1 - 4\mathrm{i} - 4 = -3 - 4\mathrm{i}.$$

2. Es seien $z = a + b\mathrm{i}$ und $\bar{z} = a - b\mathrm{i}$ zueinander konjugiert komplex. Dann gilt

$$z + \bar{z} = 2a,$$

$$z - \bar{z} = 2b\mathrm{i},$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

$$\frac{z}{\bar{z}} = \frac{a + bi}{a - bi} \cdot \frac{a + bi}{a + bi} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} + \frac{2ab}{a^2 + b^2}\mathrm{i}.$$

Insbesondere folgt für $z = 1 + \mathrm{i}$, $\bar{z} = 1 - \mathrm{i}$ sofort $z + \bar{z} = 2$, $z - \bar{z} = 2\mathrm{i}$, $z \cdot \bar{z} = 2$ und $\frac{z}{\bar{z}} = \mathrm{i}$.

Aufgabe 5.11: Berechnen Sie *

a) $(2 - 3\mathrm{i}) \cdot (-1 + 5\mathrm{i})$; b) $\dfrac{5}{1 - 2\mathrm{i}}$; c) $\dfrac{5 + 12\mathrm{i}}{3 + 2\mathrm{i}}$;

d) $(1 + \mathrm{i})^8$; e) $(1 - \mathrm{i})^2 (1 + \mathrm{i})^3$; f) $\sqrt{\mathrm{i}}$; g) $\sqrt{-5 + 12\mathrm{i}}$.

5.3.3. Veranschaulichung der komplexen Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene. Trigonometrische und exponentielle Darstellung der komplexen Zahlen

In einem kartesischen Koordinatensystem werden auf der x-Achse die reellen und auf der y-Achse die rein imaginären Zahlen abgetragen. Diese beiden Geraden werden dann reelle bzw. imaginäre Achse genannt. Somit läßt sich jeder komplexen Zahl $z = a + b\mathrm{i}$ ein Punkt P mit den kartesischen Koordinaten (a, b) in der x, y-Ebene umkehrbar eindeutig zuordnen (Bild 5.7).