die hier nur ohne Beweis angegeben werden kann, erhalten wir aus (5.8) die *exponentielle Darstellung*

$$z = r\,e^{i\varphi} \tag{5.10}$$

für die komplexe Zahl z. Diese Darstellung ist z. B. für die Ausführung von Multiplikation und Division von komplexen Zahlen von Vorteil, weil – wie ohne Beweis mitgeteilt sei – die bekannten Gesetze für das Rechnen mit Potenzen auch für $e^{i\varphi}$ gelten. So wird

$$z_1 \cdot z_2 = r_1\,e^{i\varphi_1} \cdot r_2\,e^{i\varphi_2} = r_1 r_2\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,e^{i\varphi_1}}{r_2\,e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Wegen der Periodizität von $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ gilt

$$e^{i(\varphi+k\cdot 2\pi)} = e^{i\varphi} \quad (k \text{ ganz}). \tag{5.10'}$$

Beispiel 5.9: Die komplexen Zahlen $z_1 = -2\sqrt{3} - 2i$ und $z_2 = -1 + \sqrt{3}i$ sollen in der exponentiellen Darstellung angegeben und damit die Zahlen

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 \quad \text{und} \quad z_4 = \frac{z_1}{2z_2}$$

berechnet und schließlich in der Form $\mathrm{Re}(z) + i \cdot \mathrm{Im}(z)$ angegeben werden. Man erhält:

$$r_1 = \sqrt{12+4} = 4, \quad \tan\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \varphi_1 = -\frac{5\pi}{6}, \quad \text{3. Quadrant;}$$

$$r_2 = \sqrt{1+3} = 2, \quad \tan\varphi_2 = -\sqrt{3}, \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{3}, \quad \text{2. Quadrant;}$$

$$z_1 = 4 \cdot e^{-\frac{5\pi}{6}i}; \quad z_2 = 2 \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i};$$

$$z_3 = z_1 \cdot z_2 = 8\,e^{-\frac{\pi}{6}i} = 8\left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 4\sqrt{3} - 4i;$$

$$z_4 = \frac{z_1}{2z_2} = e^{-\frac{3\pi}{2}i} = e^{\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i.$$

Aufgabe 5.12: Schreiben Sie folgende komplexen Zahlen in der Form $a + ib$: *

a) $e^{i3\pi}$; b) $e^{-i\frac{\pi}{3}}$; c) $e^{i\frac{11}{6}\pi}$; d) $e^{i\left(\frac{3}{2}\pi+2n\pi\right)}$, n ganz.

Aufgabe 5.13: Stellen Sie folgende komplexen Zahlen in der geometrischen und der exponentiellen Form (5.8) und (5.10) dar: *

a) $2i$; b) $-1-i$; c) $3 - i\sqrt{3}$.

Aufgabe 5.14: Wie lautet die Darstellung $z = a + bi$ der komplexen Zahlen mit *

a) $r = 2$, $\varphi = 60°$; b) $r = 2\sqrt{3}$, $\varphi = 300°$?

Zur Veranschaulichung der Addition zweier komplexer Zahlen $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ betrachten wir Bild 5.9.

Die geometrische Addition zweier komplexer Zahlen wird entsprechend der geometrischen Addition zweier Vektoren nach dem Parallelogrammsatz vollzogen.

Setzt man $-z = +(-z)$, so läßt sich die Subtraktion geometrisch sofort auf die Addition zurückführen (Bild 5.10), $z_2 - z_1 = z_2 + (-z_1)$.