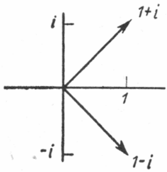

Bild 5.12

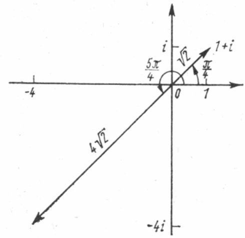

Bild 5.13. $(1+i)^5$

Beispiel 5.11:

$$(1+i)^5 = \left[\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^5 = \left[\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}\right]^5 = (\sqrt{2})^5\,e^{i\frac{5\pi}{4}}$$

$$= (\sqrt{2})^5\cdot\left(\cos 5\cdot\frac{\pi}{4} + i\sin 5\cdot\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\cdot\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= -4\left[\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right] = -4\cdot(1+i), \quad \text{(Bild 5.13).}$$

Radizieren

Eine n-te Wurzel der komplexen Zahl z wird als Lösung der Gleichung $w^n = z$ erklärt. Setzt man $z = r\,e^{i\varphi}$ und $w = R\,e^{i\omega}$ in die Gleichung ein, so wird

$$R^n\,e^{in\omega} = r\,e^{i\varphi},$$

woraus sofort $R = \sqrt[n]{r}$ folgt. Bei Berücksichtigung der Periodizität der e-Funktion (5.10′) folgt

$$n\omega_k = \varphi + k\cdot 2\pi \quad \text{oder} \quad \omega_k = \frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n},\ k \text{ ganz}.$$

Wegen der Periodizität der Funktion $e^{i\omega}$ – bzw. der Funktionen Kosinus und Sinus – gibt es dann aber nur n verschiedene w-Werte, die man zum Beispiel für $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ erhält. Somit hat $w^n = z$ die n verschiedenen Lösungen:

$$w_k^{(n)} = \sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + k\cdot\frac{2\pi}{n}\right)\right],$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5.14}$$

Im Bereich der komplexen Zahlen erhalten wir demnach für $\sqrt[n]{z}$ [1]) n verschiedene Werte. Sie liegen alle auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $\sqrt[n]{r}$ und bilden die Eckpunkte eines diesem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks. Die Wurzel mit $k = 0$, also $w_0^{(n)} = \sqrt[n]{r}\cdot\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right)$ wird als *Hauptwert* bezeichnet.

---

[1]) Hierbei ist zu beachten, daß bei reellem nichtnegativem a das Zeichen $\sqrt[n]{a}$ eine etwas andere Bedeutung hat. Für einen reellen nichtnegativen Radikanden entspricht ihm nur *ein* Wert. Im Falle eines nicht reellen Radikanden bedeutet es dagegen n Werte (siehe auch Band 9).