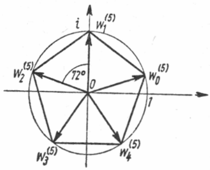

Bild 5.14.
Werte von $\sqrt[5]{i}$

Beispiel 5.12: $w = \sqrt[5]{i}$. Für die Zahl i ist $r = 1$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$, somit wird auch $R = 1$ und $\omega_k = \frac{1}{5} \cdot \frac{\pi}{2} + k \cdot \frac{2\pi}{5}$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Wir erhalten für

$$\begin{array}{llll}
\text{Hauptwert } k = 0: & \omega_0 = \frac{\pi}{10}, & \text{im Gradmaß} & 18°, \\
k = 1: & \omega_1 = \frac{\pi}{10} + 1 \cdot \frac{4\pi}{10} = \frac{\pi}{2} & \text{oder} & 90°, \\
k = 2: & \omega_2 = \frac{9}{10}\pi & \text{oder} & 162°, \\
k = 3: & \omega_3 = \frac{13}{10}\pi & \text{oder} & 234°, \\
k = 4: & \omega_4 = \frac{17}{10}\pi & \text{oder} & 306°.
\end{array}$$

Für $k = 5$ wäre $\omega_5 = \frac{21}{10}\pi = 2\pi + \frac{\pi}{10}$, die zugehörige Zahl deckt sich mit dem Hauptwert; wir erhalten keine weiteren Lösungen. Die Lage der fünf Wurzeln entnimmt man Bild 5.14.

Wir wollen noch die Lage der n Lösungen von $w_e^n = 1$, der *n-ten Einheitswurzeln*, untersuchen. Nach der allgemeinen Formel (5.14) erhalten wir

$$w_{e,k}^{(n)} = e^{ik \cdot \frac{2\pi}{n}} = \cos\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right) + i \sin\left(k \cdot \frac{2\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \quad (5.15)$$

Wenn n gerade ist, so sind für $k = 0$ und $k = \frac{n}{2}$ die reellen Zahlen $+1$ bzw. -1 unter den Lösungen. Ist n ungerade, so ist nur für $k = 0$ die reelle Wurzel $+1$ enthalten.

Wir bilden ferner

$$w_{e,n-k}^{(n)} = e^{i(n-k)\frac{2\pi}{n}} = e^{i\left(2\pi - k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} = e^{i\left(-k\frac{2\pi}{\pi}\right)} = \overline{e^{i\left(k\frac{2\pi}{n}\right)}} = \overline{w_{e,k}^{(n)}},$$

d. h., je zwei Einheitswurzeln $w_{e,k}^{(n)}$, deren Indizes sich zu n ergänzen, sind konjugiert komplex. Damit kann gesagt werden, daß sämtliche n-te Einheitswurzeln auf einem regelmäßigen n-Eck mit den Eckpunkten auf dem Einheitskreis symmetrisch zur reellen Achse liegen.