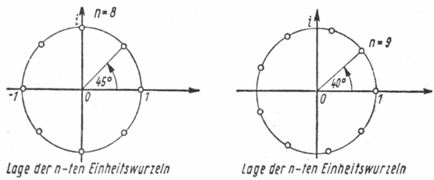

Bild 5.15. Lage der n-ten Einheitswurzeln

Schließlich ist

$$w_{e,k}^{(n)} = e^{ik\frac{2\pi}{n}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{n}}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1,$$

oder

$$w_{e,k}^{(n)} = \cos k \cdot \frac{2\pi}{n} + i \sin k \cdot \frac{2\pi}{n} = \left(\cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}\right)^k,$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5.16}$$

Das bedeutet: Sämtliche n-te Einheitswurzeln $w_{e,k}^{(n)}$ lassen sich durch Potenzieren einer geeignet ausgewählten erzeugen.

Die Zerlegung

$$w_k^{(n)} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k \cdot \frac{2\pi}{n}\right)} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi}{n}} \cdot e^{ik \cdot \frac{2\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, \tag{5.17}$$

besagt, daß man alle n Wurzeln von z bekommt, wenn man den Hauptwert nacheinander mit sämtlichen n-ten Einheitswurzeln multipliziert.

Logarithmieren

Der Logarithmus einer komplexen Zahl z wird als Lösung der Gleichung $e^w = z$ nach w erklärt. Setzt man $z = re^{i\varphi}$ und $w = a + ib$, so wird

$$e^a e^{ib} = re^{i\varphi}.$$

Es ist also $a = \ln r$ und wiederum $b = \varphi + k2\pi$ (k ganz). Mithin erhält man mit dem Symbol $\log z$

$$w = \log z = \ln r + i(\varphi + k \cdot 2\pi), \quad k = 0; \pm 1, \pm 2, \ldots, z \neq 0. \tag{5.18}$$

Bei reellem positivem a ist $\log a$ der Wert, für den $e^{\log a} = a$ wird. Häufig wird dafür auch $\ln a$ geschrieben. Im Falle eines nicht positiv reellen und von null verschiedenen z werden durch $\log z$ unendlich viele Funktionswerte zu einem Symbol zusammengefaßt. Der Logarithmus nimmt für komplexe z unendlich viele Funktionswerte an.

Der Hauptwert des Logarithmus ergibt sich für $k = 0$ zu

$$(\log z)_H = \ln r + i\varphi, \quad -\pi < \varphi \leqq +\pi.$$

So ist beispielsweise $(\log i)_H = i\frac{\pi}{2}$ oder $[\log(-1)]_H = i\pi$.

* *Aufgabe 5.15:* Ermitteln Sie sämtliche Lösungen der Gleichungen:

a) $z^3 = 3 - i\sqrt{3}$ und b) $z^4 = 81$.

* *Aufgabe 5.16:* In welchen Bereichen der Gaußschen Zahlenebene liegen die komplexen Zahlen z, für die die folgenden Beziehungen erfüllt sind:

a) $|z| < 1$ und zugleich $|z - 1| < 1$; b) $z \cdot \bar{z} = 1$; c) $|\arg z| < \frac{\pi}{2}$;

d) $|\mathrm{Re}\,(z)| + |\mathrm{Im}\,(z)| = 1$; e) $|\mathrm{Re}\,(z)| \cdot |\mathrm{Im}\,(z)| = 1$?