II. Die Induktionsannahme lautet:
Für $k = l < n$ gilt $V_n^l = n(n-1)\dots(n-l+1)$.

III. Wir betrachten nun eine Variation l-ter Ordnung. Es gibt dann noch $(n-l)$ weitere Elemente, die in dieser Variation nicht auftreten. Fügen wir je eines dieser Elemente an diese Variation ohne Einschränkung der Allgemeinheit am Ende hinzu, so erhalten wir $(n-l)$ Variationen $(l+1)$-ter Ordnung. Tun wir dies nacheinander für alle V_n^l Variationen, so bekommen wir sämtliche Variationen $(l+1)$-ter Ordnung, und zwar jede genau einmal. Also ist

$$V_n^{l+1} = V_n^l \cdot (n-l) = n(n-1)\dots(n-l+1)(n-l).$$

IV. Die Formel ist für $k = l+1$ abgeleitet und somit der Satz bewiesen. ■

Wir können auch schreiben:

$$V_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot\dots\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{6.13}$$

Beispiele 6.5:

1. Aus 5 Personen sollen 3 für bestimmte Positionen ausgewählt werden. Es gibt $V_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$ Möglichkeiten.
   Hierzu gehört auch die Antwort auf die Fragestellung aus 6.1.1.: Unter 5 Spielern soll der „Fußballer des Jahres“ ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die richtige Reihenfolge der 3 Erstplazierten?
2. Das internationale Signalbuch hat $n = 26$ verschiedene Flaggen. Aus $k = 2, 3, 4$ ausgewählten Flaggen kann man entsprechend $V_{26}^2 = 650$, $V_{26}^3 = 15600$, $V_{26}^4 = 358800$ Signale bilden, wobei Wiederholungen derselben Flaggen in einer Signalanordnung nicht zugelassen sind.

6.3.2. Variationen mit Wiederholung

Sind in den Zusammenstellungen auch Wiederholungen zugelassen, so spricht man von Variationen mit Wiederholung von n Elementen zu je k.

Satz 6.6: *Die Anzahl $V_{w_n}^k$ der Variationen mit Wiederholung von n Elementen zu je k ist* **S.6.6**

$$V_{w_n}^k = n^k \tag{6.14}$$

Beweis:

I. Induktionsbeginn: Für $k = 1$ gilt offensichtlich $V_{w_n}^1 = n$. Für $k = 2$ erhalten wir jetzt folgende möglichen Variationen:

$$\begin{matrix} a_1a_1 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2a_2 & \dots & a_2a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \dots & a_na_n \end{matrix}$$

Sie stehen in je n waagerechten und senkrechten Reihen, so daß ihre Anzahl $V_{w_n}^2 = n^2$ ist.

II. Induktionsannahme: Die Formel gilt für $k = l$, $V_{w_n}^l = n^l$.

III. Dann fügen wir an jede der n^l Variationen l-ter Ordnung der Reihe nach ein weiteres Element der n gegebenen ohne Einschränkung der Allgemeinheit am Ende hinzu und erhalten somit insgesamt $n^l \cdot n = n^{l+1}$ Variationen $(l+1)$-ter Ordnung und jede nur einmal.

IV. Damit ist $V_{w_n}^{l+1} = n^{l+1}$ und der Satz bewiesen. ■

Beispiele 6.6:

1. Aus den 2 Ziffern (0, 1) des Dualsystems lassen sich 2^k Nachrichten – k-stellige positive ganze Zahlen – bilden. Der Fünfkanalcode für den Lochstreifen eines