Für die Anzahl dieser Kombinationen erhalten wir demnach einen Quotienten, dessen Nenner das Produkt der natürlichen Zahlen von 1 bis k ist und dessen Zähler ebenfalls k Faktoren enthält, die mit n beginnen und jeweils um eine Einheit abnehmen.

Beispiele 6.7:

1. Wenn bei einer Feier sich 7 Personen zunächst mit Handschlag gegenseitig begrüßen und dann paarweise miteinander die Gläser anstoßen, so gibt es $C_7^2 = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 21$ Handschläge und ebensoviel Gläserklingen.
2. Ein Skatspieler kann $C_{32}^{10} = 64\,512\,240$ verschiedene Spiele zu je 10 Karten erhalten.
3. Beim Zahlenlotto stellt jeder Tip eine Auswahl von $k = 5$ aus $n = 90$ Zahlen dar. Er bildet eine Kombination zu je 5 von 90 Elementen. Die Anzahl der möglichen Tips beträgt
$$C_{90}^5 = \frac{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 43\,949\,268.$$
4. Bei einer Stichprobe zur Qualitätskontrolle greift man aus n Produkten k heraus. Die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten ist C_n^k. Dabei wird ein kontrolliertes Produkt nicht zurückgelegt.
5. Zwischen Halle und Leipzig befinden sich 7 weitere Eisenbahnstationen. Wieviel verschiedene Normalfahrkarten 2. Klasse werden innerhalb dieser Strecke ausgegeben, wobei nur jeweils eine Richtung berücksichtigt werden soll? Dann gibt es
$$C_2^9 = \frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36 \text{ solcher Fahrkarten.}$$

6.4.2. Binomialkoeffizient und binomischer Lehrsatz

Da der in C_n^k auftretende Quotient auch in vielen anderen mathematischen Formeln vorkommt, verwendet man für ihn ein abkürzendes Symbol $\binom{n}{k}$, lies: „n über k“. Es geht auf Euler zurück. Wir schreiben also

$$C_n^k = \binom{n}{k}. \tag{6.17}$$

Wir wollen uns jetzt mit einigen einfachen Eigenschaften derartiger Quotienten beschäftigen. Dazu betrachten wir die

Definition 6.1: *Es sei a eine reelle Zahl und $k \geqq 1$, ganz, dann wird gesetzt:* **D.6.1**

$$\frac{a(a-1)(a-2)\dots(a-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot k} = \binom{a}{k}^{1)} \tag{6.18}$$

und $\binom{a}{0} = 1$.

Der Ausdruck $\binom{a}{k}$ wird *Binomialkoeffizient* genannt. Wir beachten, daß a im allgemeinen beliebig reell ist. Deshalb soll noch einmal betont werden, daß $\binom{a}{k}$ ein

[1]) In $\binom{a}{k}$ kann a auch eine komplexe Zahl sein.