

7. Mengen

Die Mengenlehre ist für die Mathematik von grundlegender Bedeutung. Jedes derzeit bekannte mathematische Teilgebiet läßt sich mengentheoretisch begründen. Darüber hinaus ist aber die Mengenlehre auch sehr gut geeignet, ja notwendig, um viele Probleme in den Naturwissenschaften, der Technik und der Ökonomie zu formulieren und zu lösen. Als Begründer der Mengenlehre wird der Hallenser Mathematiker Georg Cantor (1845–1918) angegeben. Die *Cantorsche Mengendefinition* kann jedoch Anlaß zu Widersprüchen geben, so daß man heute zur streng axiomatischen Begründung der Mengenlehre einen *Stufenkalkül* benutzt. Trotzdem ist es zweckmäßig, die anschauliche Cantorsche Mengendefinition zugrunde zu legen, da diese für das Verständnis vieler mathematischer Teilgebiete und Anwendungen völlig ausreicht. Wir werden deshalb in diesem Abschnitt nur an einer Stelle eine Bemerkung zum Stufenaufbau der Mengenlehre machen.

7.1. Zum Begriff der Menge

Ausgehend von den obigen allgemeinen Bemerkungen legen wir die folgende Definition des Mengenbegriffs zugrunde.

Definition 7.1: Eine Menge ist eine Gesamtheit (Zusammenfassung) bestimmter, wohl- unterschiedener Objekte unserer Anschauung oder unseres Denkens, wobei von jedem Objekt eindeutig feststeht, ob es zur Menge gehört oder nicht. D.7.1

Beispiele solcher Mengen sind:

Beispiel 7.1:

- (1) Die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 5, 8, 12.
- (2) Die Menge der Farben grün, rot, gelb, blau.
- (3) Die Menge der Leipziger Telefonnummern.
- (4) Die Menge der reellen Zahlen x mit der Eigenschaft $x^2 + 2 = 0$.
- (5) Die Menge der zweiseitigen Aussagen.

Für alle Beispiele ist leicht zu prüfen, daß die Definition 7.1 zutrifft.

Wir vereinbaren folgende Rede- und Schreibweisen:

- a) Die zur Menge gehörenden Objekte heißen *Elemente* der Menge.
- b) Als Kurzbezeichnungen verwenden wir für Mengen große lateinische Buchstaben wie $M, M_1, M_2, M_3, \dots, A, B, C, \dots$. So seien z. B. die Mengen (1) bis (5) mit M_1 bis M_5 bezeichnet.
- c) Sind wir in der Lage, die Elemente einer Menge anzugeben, so schreiben wir diese in geschweiften Klammern

$$M = \{ \dots \}.$$

Beispiel 7.2:

- (1) $M_1 = \{1, 2, 3, 5, 8, 12\};$
- (2) $M_2 = \{\text{grün, rot, gelb, blau}\}.$