Definition 7.4 *(leere Menge): Eine Menge M heißt leer, wenn sie kein Element enthält. Die* **leere Menge** *wird mit $\emptyset$ bezeichnet.* **D.7.4**

Die Bildung einer leeren Menge geschieht durch eine Aussageform $m(x)$, die für kein x aus dem zugrunde gelegten Variablenbereich X zu einer wahren Aussage wird, d. h.,

$$M = \{x \mid m(x)\} = \emptyset \leftrightarrow \text{Die Aussage } (\forall(x)\overline{m}\,(x) \text{ ist wahr}. \tag{7.4}$$

Als Beispiel betrachten wir zunächst die Menge M_4. M_4 = Menge der reellen Zahlen x mit der Eigenschaft $x^2 + 2 = 0$. Mit $X = \mathbf{R}$ können wir also schreiben:

$$M_4 = \{x \mid x^2 + 2 = 0\}.$$

Nun kann man aber schnell zeigen: Nur die komplexen Zahlen $x_1 = \sqrt{2} \cdot \mathrm{i}$, $x_2 = -\sqrt{2} \cdot \mathrm{i}$ machen die Aussageform (Gleichung)

$$x^2 + 2 = 0$$

zu einer wahren Aussage. Demzufolge gilt für alle reellen Zahlen x

$$x^2 + 2 \neq 0,$$

und daraus folgt nach (7.4)

$$X = \mathbf{R}, \quad M_4 = \{x \mid x^2 + 2 = 0\} = \emptyset.$$

Die eine leere Menge erzeugende Aussagenform ist nun aber keineswegs eindeutig bestimmt, so gilt z. B.

$$A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x < 0\} = \emptyset;$$

$$B = \{x \mid x \text{ ist ein Monat } \wedge x \text{ besitzt mehr als 31 Tage}\} = \emptyset$$

usw. Man beachte aber: Ist $\emptyset$ die leere Menge erster Stufe und bilden wir eine Menge M zweiter Stufe folgendermaßen

$$M = \{\emptyset\},$$

so ist M nicht etwa die leere Menge zweiter Stufe, denn M enthält genau ein Element, nämlich die leere Menge erster Stufe $\emptyset$.

In Teilgebieten und bei Anwendungen der Mathematik ist es oft erforderlich zu wissen, ob bestimmte Mengen leer oder nicht leer sind.

7.2.2. Potenzmenge

Wir wenden uns jetzt weiteren wichtigen speziellen Mengen zu.

Definition 7.5 *(Potenzmenge): M sei eine Menge, und A sei eine Teilmenge von M, d. h. $A \subseteqq M$. Wir bilden eine Menge, die alle Teilmengen A von M als Elemente enthält und nennen diese* **Potenzmenge** *$P(M)$ von M.* **D.7.5**

Kurzschreibweise: $P(M) = \{A \mid A \subseteqq M\}$. (7.5)

Dabei heißt M die **Universalmenge.**[1])

---

[1]) Unter „Universalmenge" ist, wenn nichts anderes gesagt wird, immer die im Zusammenhang mit der betreffenden inhaltlichen Problematik zugrunde gelegte umfassende Grundmenge zu verstehen (siehe z. B. Aufgabe 7.1).