Folgerung: *Es gilt stets, d. h. für jede Menge M,*

$$\emptyset \in P(M) \wedge M \in P(M).$$

(Grund: $\emptyset \subseteq M$, $M \subseteq M$).

Die Potenzmenge einer Menge M erster Stufe ist eine Menge zweiter Stufe.

Beispiel 7.9: Wir betrachten die zweielementige Zahlenmenge $M = \{1, 2\}$. Dann gilt:

$$P(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, M\}.$$

Fassen wir $P(M)$ nun wieder als Ausgangsmenge für eine Potenzmengenbildung auf, so können wir die Potenzmenge $P(P(M))$ von $P(M)$, die wir mit $P^2(M)$ bezeichnen wollen, bilden. Es wird:

$$\begin{aligned} P^2(M) = P(P(M)) = \{&\emptyset^2, \{\emptyset\}, \{\{1\}\}, \{\{2\}\}, \{M\}, \{\emptyset, \{1\}\}, \{\emptyset, \{2\}\}, \\ &\{\emptyset, M\}, \{\{1\}, \{2\}\}, \{\{1\}, M\}, \{\{2\}, M\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}\}, \\ &\{\emptyset, \{1\}, M\}, \{\emptyset, \{2\}, M\}, \{\{1\}, \{2\}, M\}, P(M)\}, \end{aligned}$$

wobei $\emptyset^2$ die leere Menge 2. Stufe, also hier die Teilmenge von $P(M)$, die kein Element enthält, ist.

Es sei vermerkt, daß die Benutzung von Potenzmengen $P^2(M)$ zum Beispiel auf dem Gebiet der Optimierung wichtige Anwendungen besitzt.

7.2.3. Komplementärmenge

D.7.6 **Definition 7.6** *(Komplementärmenge): Gegeben sei eine Menge A, $A \subseteq M$. M besitzt dabei wie in Definition 7.5 die Rolle einer Universalmenge. $\bar{A}$ heißt* **Komplementärmenge** *von A bezüglich der Universalmenge M, wenn gilt:*

$$\bar{A} = \{x \mid x \in M \wedge x \notin A\},$$

d. h., $\bar{A}$ enthält alle Elemente von M, die nicht zu A gehören.

Stellen wir uns die Menge A durch eine Aussageform $a(x)$ erzeugt vor, so können wir die obige Definition folgendermaßen formulieren:

Mit $A = \{x \mid x \in M \wedge a(x)\}$ wird $\bar{A} = \{x \mid \in M \wedge \overline{a(x)}\}$.

Beispiel 7.10:

(1) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x \text{ ist eine gerade Zahl}\} = \{x \mid x = 2 \cdot m \wedge m \in \mathbf{N}\}$;

$\bar{A} = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x \text{ ist keine gerade Zahl}\} = \{x \mid x = 2m + 1 \wedge m \in \mathbf{N}\}$.

(2) A = Menge aller innerhalb des Kreises $x^2 + y^2 = 1$ liegenden Punkte der Ebene. Die Universalmenge M sei die Menge aller innerhalb oder auf dem Rande des Quadrates Q (Bild 7.1) liegenden Punkte. Dann ist $\bar{A}$ die in Bild 7.1 schraffierte Menge (einschließlich Kreisrand) aller Punkte, die zu M gehören, aber nicht innerhalb des Kreises liegen.

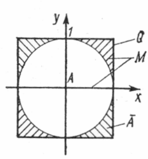

Bild 7.1.
Komplement von A