setzt. Die Verschmelzungs- und Distributivgesetze sind zum Teil für uns neu, wenn wir an das Rechnen mit Zahlen denken. Aus der Logik jedoch sind uns diese Regeln nicht fremd, da z. B.

$$p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p \tag{3.4}$$

oder

$$p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (p \vee q) \tag{3.5}$$

Tautologien sind, die linke und die rechte Seite vom Doppelpfeil also jeweils logisch gleichwertig sind.

Würden wir jedoch A, B, C als Zahlen (a, b, c), $\cap$ als Multiplikation $(\cdot)$ und $\cup$ als Addition $(+)$ interpretieren, so wissen wir, daß

$$a \cdot (a + c) = a, \qquad a + (a \cdot c) = a, \qquad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$$

im allgemeinen nicht gelten. Wir haben es also hier mit für uns gegenüber dem Rechnen mit Zahlen neuartigen Rechenregeln zu tun. Die Bezeichnungen Nullelement für die leere Menge $\emptyset$ und Einselement für die Universalmenge M verwenden wir hier deshalb, weil diese Mengen eine ähnliche Rolle wie die Zahlen 0 und 1 spielen. Die Beziehungen

$$a + 0 = a, \qquad a \cdot 0 = 0, \qquad a \cdot 1 = a$$

entsprechen unmittelbar den Beziehungen (7.16). Eine Beziehung $a + 1 = 1$ für alle a gibt es im Bereich der Zahlen jedoch nicht.
Gemäß Regel (7.13) können wir Vereinigung und Durchschnitt von je n Mengen bilden.

Wir bezeichnen:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i; \tag{7.18}$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i. \tag{7.19}$$

Im Bild 7.6 werden die Regeln (7.14) dargestellt.

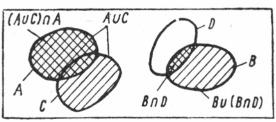

Bild 7.6.
Die Verschmelzungsregeln
$A \cap (A \cup C) = A$, $B \cup (B \cap D) = B$

Man kann sich genauso die anderen angegebenen Regeln veranschaulichen. Es ist jedoch auch ein Beweis der Regeln ohne die Hilfsmittel der Anschauung direkt aus den Definitionen möglich. Dabei ist es besonders zweckmäßig, von den Darstellungen mit Hilfe der Aussageformen (7.7), (7.9) auszugehen.

Beispiel 7.14: Wir beweisen $A \cup (A \cap B) = A$, wobei wir zur Vereinfachung der Schreibweise $X = Y$ (gleiche Variablenbereiche für $a(x)$ und $b(y)$) wählen. Dann sind:

$$A = \{x \mid x \in X \wedge a(x)\}, \; B = \{x \mid x \in X \wedge b(x)\},$$

$$A \cap B = \{x \mid x \in X \wedge a(x) \wedge b(x)\}.$$

Wir bilden: $A \cup (A \cap B)$ und erhalten nach (7.7):

$$A \cup (A \cap B) = \{x \mid (x \in X \wedge a(x)) \vee ((x \in X \wedge a(x)) \wedge b(x))\}$$
$$= \{x \mid x \in X \wedge a(x)\} = A,$$