D.7.10 **Definition 7.10:** *Eine Menge $M, M \neq \emptyset$, die endlich viele Elemente besitzt, heißt* **endliche Menge,** *eine Menge $M, M \neq \emptyset$, die nicht aus endlich vielen Elementen besteht, heißt* **unendliche Menge**.

A_1, A_2 sind endliche, A_3, A_4 unendliche Mengen.

Wir verabreden die folgende Bezeichnung:

$\mu(M)$ – Anzahl der Elemente der endlichen Menge M.

Beispiele, bei denen auch $\mu(M)$ für gewisse Mengen M zu bestimmen ist, geben wir am Ende dieses Abschnittes an.

Nun möchte man aber auch gern unendliche Mengen vergleichen und damit klassifizieren können. Aus diesem Grunde führt man den Begriff der *Mächtigkeit* ein, der im Spezialfall endlicher Mengen mit der Anzahl ihrer Elemente übereinstimmt.

7.4.1. Gleichmächtige Mengen

D.7.11 **Definition 7.11:** *Zwei Mengen A, B (endliche oder unendliche Mengen) besitzen die gleiche Mächtigkeit, wenn man jedem Element $a, a \in A$, umkehrbar eindeutig ein Element $b, b \in B$, zuordnen kann. Daraus folgt:*

Wenn dem Element $a_1, a_1 \in A$, das Element $b, b \in B$, und auch dem Element a_2, $a_2 \in A$, das Element $b, b \in B$, zugeordnet wird, so gilt $a_1 = a_2$ (d. h. voneinander verschieschiedenen Elementen aus A werden voneinander verschiedene Elemente aus B zugeordnet).

Mittels unserer logischen Zeichen können wir diese Eigenschaft folgendermaßen schreiben: A, B seien die Bereiche der Variablen a_1, a_2, b.

$$w((\forall a_1)(\forall a_2)(\forall b)(\text{„Dem Element } a_1 \text{ wird } b \text{ zugeordnet“} \wedge \text{„Dem Element } a_2 \text{ wird } b \text{ zugeordnet“} \rightarrow a_1 = a_2)) = W. \qquad (7.24)$$

Schreibweise: A und B haben die gleiche Mächtigkeit $= A$ glm. B.

S.7.3 **Satz 7.3:** *Die mit Definition 7.11 eingeführte* **Gleichmächtigkeit** *besitzt die folgenden Eigenschaften*

(I) A glm. A, *(Reflexivität)*

(II) A glm. $B \rightarrow B$ glm. A, *(Symmetrie)*

(III) A glm. $B \wedge B$ glm. $C \rightarrow A$ glm. C. *(Transitivität)*

Durch die Definition 7.11 entstehen Mengen von Mengen gleicher Mächtigkeit, die charakterisiert sind durch den **Mächtigkeitstyp** *(Kardinalzahlen).*

Beispiel 7.16: Die endlichen Mengen stellen einen Mächtigkeitstyp dar. Die Kardinalzahlen hierfür sind die Elemente der Menge der natürlichen Zahlen. Nach Definition 7.11 können wir $\mu(M)$ auch Mächtigkeit der endlichen Menge M nennen. Die Mengen

$$M_1 = \{\text{rot, grün, blau}\}, \qquad M_2 = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}\}, \qquad M_3 = \{\{1\}, \{2\}, \emptyset\}$$

sind gleichmächtig. So können wir z. B. die folgende Zuordnung (charakterisiert durch Paare) $(\text{rot}, \sqrt{4})$, $(\text{grün}, \sqrt{2})$, $(\text{blau}, \sqrt{3})$ vornehmen, die die Definition 7.11 erfüllt. Wie man ohne weiteres sieht, gilt außerdem

$$\mu(M_1) = \mu(M_2) = \mu(M_3) = 3.$$

Die Mengen M_1, M_2, M_3 gehören also zur Menge der dreielementigen Mengen.