Den Mächtigkeitstyp einer unendlichen Menge werden wir nachfolgend ebenfalls mit $\mu(M)$ bezeichnen und uns mit dem Typ der *abzählbaren Menge* und der *Mächtigkeit des Kontinuums* etwas näher beschäftigen.

7.4.2. Abzählbare Mengen

Definition 7.12: *Eine Menge M heißt* **abzählbar**, *wenn gilt:* **D.7.12**

$$M \text{ glm. } \mathbf{N} \text{ mit } \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

(d. h., die Elemente von M lassen sich mit Hilfe der natürlichen Zahlen numerieren).

Einige Eigenschaften abzählbarer Mengen werden im nachfolgenden Satz formuliert.

Satz 7.4: **S.7.4**

(1) *Eine beliebige unendliche Teilmenge einer abzählbaren Menge M ist wieder eine abzählbare Menge.*

(2) *Es seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ abzählbare Mengen. Dann gilt: $M = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ist eine abzählbare Menge.*
Sind gewisse der A_k endliche Mengen, so bleibt die Gültigkeit dieser Aussage erhalten.

(3) *Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen ist eine abzählbare Menge.*

(4) *Aus einer unendlichen Menge kann stets eine abzählbare Menge abgespalten werden.*

(5) *Wenn beim Abspalten einer abzählbaren Menge A von einer unendlichen Menge M eine unendliche Menge B übrigbleibt, so haben M und B die gleiche Mächtigkeit.*

Die Aussagen (1) bis (5) vermitteln eigentlich erst eine klare Vorstellung vom Begriff der abzählbaren Menge. Die Beweise können hier nicht vorgeführt werden.

Beispiel 7.17: Beispiele für abzählbare Mengen:

(1) Die Menge **G** der ganzen Zahlen ist abzählbar.

Beweis: Es gilt

$$\mathbf{G} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} \cup \{-1, -2, -3, \ldots\} = \mathbf{N} \cup G^{(-)}.$$

Zunächst ist **N** nach Definition abzählbar. $G^{(-)} = \{-1, -2, -3, \ldots\}$ ist ebenfalls abzählbar. Ordnen wir nämlich einem beliebigen Element $-n \in G^{(-)}$ das Element $n - 1 \in \mathbf{N}$ zu, so ist Definition 7.11 erfüllt, und deshalb folgt die Behauptung aus Satz 7.4 (2), wobei $A_1 = \mathbf{N}$, $A_2 = G^{(-)}$ zu setzen ist. Wir sehen also, daß die Menge **G**, obwohl man gefühlsmäßig meint, daß sie „mehr" Elemente als **N** enthält, ebenfalls abzählbar, also gleichmächtig **N** ist. Im folgenden Beispiel wird diese Eigenschaft des Mächtigkeitsbegriffes noch deutlicher. ∎

(2) Die Menge **P** der rationalen Zahlen ist eine abzählbare Menge.

Beweis: Wir wissen, daß sich **P** folgendermaßen darstellen läßt:

$$\mathbf{P} = \left\{ \frac{m}{k} \,\middle|\, m \in \mathbf{G} \wedge k \in \mathbf{N} \setminus \{0\} \wedge m \text{ und } k \text{ sind teilerfremd} \right\}.$$