7.5. Produktmengen

7.5.1. Geordnete Paare und geordnete n-Tupel

Oft kommt es darauf an, gewisse Elemente von Mengen gleichzeitig zu betrachten und so zusammenzufassen, daß damit eine Reihenfolge festgelegt wird (siehe auch 7.6., 7.9.). Die einfachste solche Zusammenfassung ist die von 2 Elementen zu einem Paar, wobei es auf die Reihenfolge der Elemente ankommt.

D.7.13 **Definition 7.13** *(geordnetes Paar):*

(1) *Ein* **geordnetes Paar** (a, b) *ist eine Gesamtheit von zwei Elementen a, b, wobei es auf die Reihenfolge dieser Elemente ankommt, d. h.* $(a, b) \neq (b, a)$, *falls* $a \neq b$.

(2) *Zwei geordnete Paare* (a, b) *und* (c, d) *heißen gleich genau dann, wenn gilt*

$$a = c \wedge b = d. \tag{7.26}$$

Die im wesentlichen verbale Definition 7.13 bringt den neuen Begriff „geordnetes Paar". Wir wollen versuchen, diesen mit Hilfe des schon erklärten Begriffes „Menge" zu definieren.

Zunächst stellen wir die Frage: Kann man (a, b) durch die Menge $\{a, b\}$ definieren, d. h. $(a, b) = \{a, b\}$ setzen? Dies ist nicht möglich, denn es gilt $\{a, b\} = \{b, a\}$ und demzufolge wäre $(a, b) = (b, a)$ auch für $a \neq b$. Der Ansatz

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}, \tag{7.27}$$

das geordnete Paar als Menge zweiter Stufe zu definieren, ist dagegen erfolgreich, denn man kann zeigen, daß die in (7.27) erklärte Menge die Gleichheitsdefinition (7.26) erfüllt.

Damit können wir unsere verbale Definition 7.13 ersetzen durch eine Definition, die den Begriff „geordnetes Paar" auf den Mengenbegriff zurückführt.

D.7.14 **Definition 7.14:** *Ein geordnetes Paar* (a, b) *ist die Menge* $\{\{a\}, \{a, b\}\}$

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Für die Beschreibung vieler praktisch interessanter Sachverhalte reicht jedoch der Begriff des geordneten Paares nicht aus. Wir erweitern deshalb auf Anordnungen von n Elementen, wobei es ebenfalls wieder auf die Reihenfolge dieser Elemente ankommt. Wir nutzen die Definition 7.14 ($n = 2$) aus und definieren induktiv:

D.7.15 **Definition 7.15:** *Ein* **geordnetes n-Tupel** $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *von Elementen ist ein geordnetes Paar, dessen Elemente das* $(n - 1)$*-Tupel* $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})$ *und das Element* a_n *sind* ($n = 2$: *Induktionsanfang):*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n) = \{\{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1})\}, \{(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n\}\}. \tag{7.28}$$

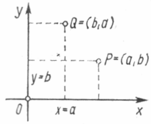

Bild 7.8. Darstellung geordneter Paare als Punkte einer Ebene

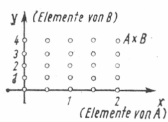

Bild 7.9. Darstellung von $A \times B$