ist, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(1) $d(x, y) \geqq 0$ für alle $(x, y) \in X \times X$, (7.43)

(2) $d(x, y) = 0 \leftrightarrow x = y$, (7.44)

(3) $d(x, y) = d(y, x)$ *für alle* $(x, y) \in X \times X$, (7.45)

(4) *für drei beliebige Elemente* $x, y, z \in X$ gilt:

$d(x, z) \leqq d(x, y) + d(y, z)$ **Dreiecksungleichung** (7.46)

Die Größe $d(x, y)$ heißt dann Abstand auf X.
Unter einem **metrischen Raum** *versteht man eine Menge X gemeinsam mit einem auf X gegebenen Abstand $d(x, y)$.*

Die metrischen Räume besitzen große Bedeutung in der Funktionalanalysis und stellen eine wichtige Grundlage für Probleme der mathematischen Operationsforschung und der numerischen Mathematik dar. Wir betrachten als Beispiel noch einmal die Menge $X = R^n$, von der wir bereits gezeigt hatten, daß sie einen linearen Raum bildet. Auf R^n führen wir jetzt einen Abstand d folgendermaßen ein: Für beliebige $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ definieren wir:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}. \tag{7.47}$$

Bild 7.12. zeigt diesen Abstand im Falle $n = 2$, der mit dem gut bekannten geradlinigen Abstand zweier Punkte der Ebene übereinstimmt. (Aus diesem Grunde heißt (7.47) übrigens auch *Euklidischer Abstand* und R^n *Euklidischer Raum.*)

Eigentlich wäre nachzuprüfen, daß (7.47) tatsächlich die Bedingungen (7.43) bis (7.46) erfüllt. Wir wollen diese einfache Aufgabe jedoch dem Leser überlassen.

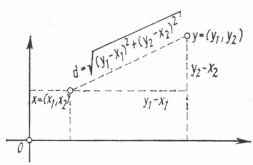

Bild 7.12.
Euklidischer Abstand im R^2

Als Ergebnis erhalten wir: Die Menge R^n ist ein linearer, metrischer Raum. Weitere Beispiele können erst später, beispielsweise in Abschnitt 8., behandelt werden.

Im folgenden wollen wir noch den wichtigen Begriff der Umgebung einführen. Dazu sind einige weitere Definitionen notwendig:

Definition 7.21: *X sei ein metrischer Raum.* **D.7.21**

1. *Die Menge* $K(a, r) = \{x \mid x \in X \wedge d(a, x) < r\}$ (7.48)
heißt **offene Kugel** *um a mit dem Radius r.*

2. *Die Menge* $K'(a, r) = \{x \mid x \in X \wedge d(a, x) \leqq r\}$ (7.49)
heißt **abgeschlossene Kugel** *um a mit dem Radius r.*

3. *Eine nichtleere Teilmenge A von X heißt* **beschränkte Menge** *in X, wenn gilt: Es existiert eine abgeschlossene Kugel $K'(a, r)$ mit endlichem Radius r, so daß $A \subseteq K'(a, r)$ gilt.*