Definition 7.24: D.7.24

a) *Es sei $A \subseteq \mathbf{R}$; $b \in \mathbf{R}$ heißt obere Schranke von A, wenn für alle $x \in A$ die Ungleichung $x \leqq b$ erfüllt ist; $a \in \mathbf{R}$ heißt untere Schranke von A, wenn $a \leqq x$ für alle $x \in A$ gilt.*

b) *Die Menge A heißt nach oben (bzw. nach unten) beschränkt, wenn die Menge aller oberen (bzw. unteren) Schranken von A nicht leer ist.*

Diese Betrachtung ist eine Verfeinerung unserer Aussagen im Beispiel 7.20.

Ist nämlich dort $X = \mathbf{R}$ und $A \subseteq X$ eine beschränkte Menge, so ist A nach oben und unten beschränkt. Auch die Umkehrung dieser Behauptung ist richtig. Wir erklären nun das *Supremum* und das *Infimum der Menge A:*

Definition 7.25: D.7.25

a) $\gamma = \sup A$ *ist eine reelle Zahl mit den Eigenschaften:*

1. *γ ist obere Schranke von A;*
2. *für jede natürliche Zahl n, $n \geqq 1$, existiert ein $x \in A$ so, daß $\gamma - \dfrac{1}{n} < x \leqq \gamma$ gilt.*

b) $\nu = \inf A$ *ist eine reelle Zahl mit den Eigenschaften:*

1. *ν ist untere Schranke von A;*
2. *für jede natürliche Zahl n, $n \geqq 1$, existiert ein $x \in A$ so, daß $\nu \leqq x < \nu + \dfrac{1}{n}$ gilt.*

Anschaulich gesprochen: Das Supremum einer Menge $A \subseteq \mathbf{R}$, $\gamma = \sup A$, ist die *kleinste* obere Schranke von A, denn γ selbst ist obere Schranke, aber $\gamma - \dfrac{1}{n}$ ist auch für beliebig großes n keine obere Schranke von A. Entsprechend kann man sich das Infimum einer Menge A, $\nu = \inf A$, anschaulich vorstellen.

Für eine nach oben beschränkte Zahlenmenge $A \subseteq \mathbf{R}$ existiert stets das Supremum, für eine nach unten beschränkte Menge $A \subseteq \mathbf{R}$ stets das Infimum. Supremum bzw. Infimum einer unendlichen Menge $A \subseteq \mathbf{R}$ müssen jedoch nicht zu A gehören.

Ist nämlich z. B. $A = [0, 1)$, so gilt: $\gamma = \sup A = 1$, $\nu = \inf A = 0$ und $\nu = 0 \in A$, aber $\gamma = 1 \notin A$.

Gehören γ bzw. ν aber zu A, so schreiben wir

$$\gamma = \sup A = \max A \quad \text{bzw.} \quad \nu = \inf A = \min A,$$

max A – Maximum der Menge A (größtes Element von A),
min A – Minimum der Menge A (kleinstes Element von A).

In unserem Beispiel gilt $\nu = \inf A = \min A = 0$, während das Maximum von A nicht existiert.

Diese Betrachtungen besitzen besondere Bedeutung im Zusammenhang mit reellwertigen Funktionen (Abschnitt 9.).

Aufgabe 7.10: *

a) Man zeige, daß das halboffene Intervall $[0, 1)$ keine offene Teilmenge von $R^1 = \mathbf{R}$ ist!

b) Man bilde: $A = [0, 1) \cap [1, 2]$,

$$B = ([-1, +1] \cup (0, 2)) \cap ([1, 2] \cup [3, 10]).$$