

## 7.9. Weitere Anwendungen (Graphen, konvexe Polyeder)

### 7.9.1. Graphen

Bei der Planung industrieller Prozesse und bei der Betrachtung von *Netzwerken*, die in den verschiedenen Wissenschaftsgebieten auftreten, findet man vielfältige Beziehungen zwischen Wirtschaftsobjekten, Personengruppen und anderen Größen. Zur Beschreibung solcher Objekte und ihrer Wechselbeziehungen erleichtern graphentheoretische Betrachtungsweisen sowohl die mathematische Modellierung als auch die Lösung der anstehenden Probleme. Man geht dabei so vor, daß man den Objekten Punkte, den Wechselbeziehungen diese Punkte verbindende Kurven zuordnet. Denken wir z. B. an das Bild 7.11, so haben wir damit den *Graphen* des zugrunde liegenden konkreten Systems dargestellt. Im folgenden wollen wir den Begriff des *gerichteten Graphen* definieren, müssen uns aber dann mit einigen ganz wenigen Beispielen, die die Vielfalt graphenartiger Gebilde in keiner Weise widerspiegeln, zufriedengeben. Wir verweisen den interessierten Leser insbesondere auf [3] und Band 21/2.

**D.7.26 Definition 7.26:** Ein gerichteter Graph  $D$  besteht aus einer Knotenmenge  $V$ ,

$$V = \{v_1, v_2, \dots\}, \quad V \neq \emptyset,$$

und einer Menge  $A$  gerichteter Kanten, die als Teilmenge der Menge  $V \times V$  dargestellt wird. Wir schreiben

$$D = (V, A).$$

Ist  $a \in A$  die gerichtete Kante, die als Anfangsknoten  $v_i$ , als Endknoten  $v_j$  enthält, so definieren wir

$$a = (v_i, v_j).$$

**Beispiel 7.25** (siehe auch Bild 7.14):

$$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \quad A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8, a_9\}.$$

mit

$$a_1 = (v_5, v_5), \quad a_4 = (v_1, v_3), \quad a_7 = (v_1, v_2),$$

$$a_2 = (v_2, v_3), \quad a_5 = (v_4, v_3), \quad a_8 = (v_4, v_4),$$

$$a_3 = (v_3, v_2), \quad a_6 = (v_4, v_5), \quad a_9 = (v_2, v_1).$$

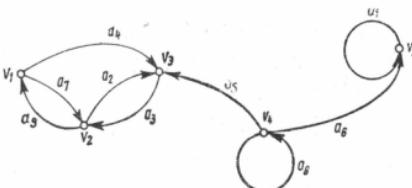


Bild 7.14.  
 $D = (V, A)$ ,  
 $V = \{v_1, \dots, v_5\}$ ,  
 $A = \{a_1, \dots, a_9\}$

In Bild 7.11 ist ein weiteres Beispiel für einen gerichteten Graphen dargestellt.

Besondere praktische Bedeutung besitzen die Graphen als Grundlage der Netzplantechnik. Es sei z. B. ein Projektlauf in 6 Vorgänge  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$  eingeteilt. Jeder Vorgang  $v_i$  besitzt einen frühesten Anfangstermin  $t'_i$ , eine Dauer  $d_i$  und eine Mindestzeit  $t''_i$ , die nach Beendigung des Vorgangs  $v_i$  noch bis zur Beendigung des Gesamtprojekts benötigt wird.