

# MATHEMATIK

FÜR INGENIEURE  
NATURWISSENSCHAFTLER  
ÖKONOMEN  
LANDWIRTE

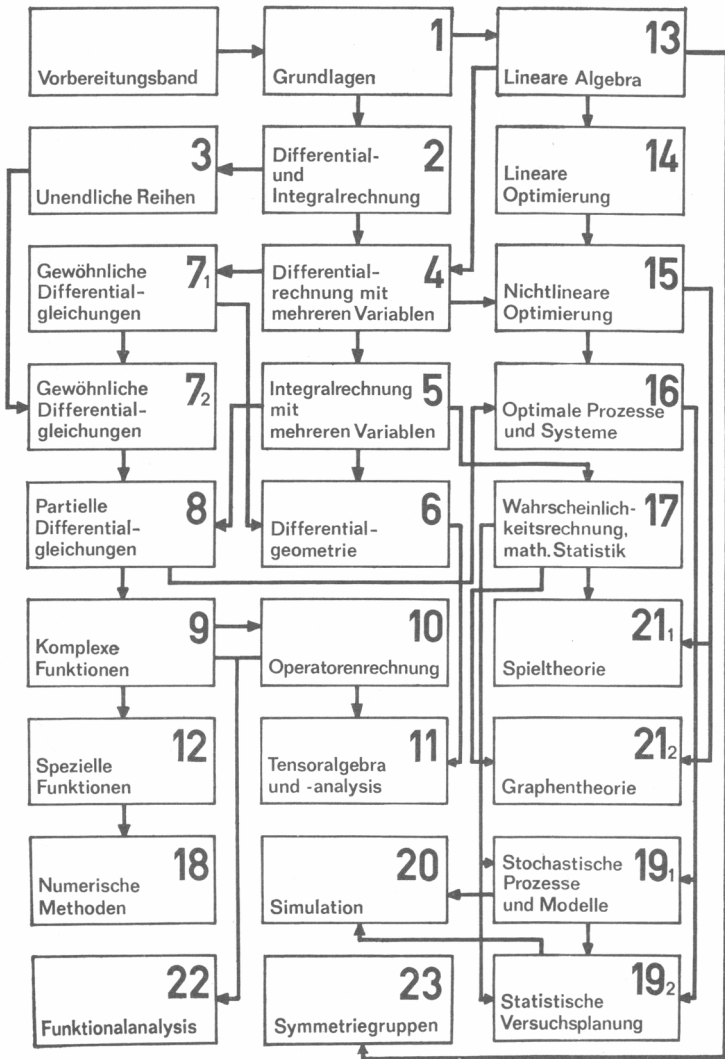
6

SCHÖNE

Differentialgeometrie

```

graph TD
    1[1 Grundlagen] --> 13[13 Lineare Algebra]
    1 --> 2[2 Differential- und Integralrechnung]
    2 --> 3[3 Unendliche Reihen]
    2 --> 4[4 Differentialrechnung mit mehreren Variablen]
    4 --> 15[15 Nichtlineare Optimierung]
    4 --> 5[5 Integralrechnung mit mehreren Variablen]
    5 --> 6[6 Differentialgeometrie]
    5 --> 10[10 Operatorenrechnung]
    6 --> 17[17 Wahrscheinlichkeitsrechnung, math. Statistik]
    6 --> 11[11 Tensoralgebra und -analysis]
    10 --> 11
    11 --> 20[20 Simulation]
    11 --> 23[23 Symmetriegruppen]
    13 --> 14[14 Lineare Optimierung]
    14 --> 16[16 Optimale Prozesse und Systeme]
    16 --> 17
    16 --> 21_1[21_1 Spieltheorie]
    16 --> 21_2[21_2 Graphentheorie]
    17 --> 19_1[19_1 Stochastische Prozesse und Modelle]
    17 --> 19_2[19_2 Statistische Versuchsplanung]
    19_1 --> 19_2
    19_1 --> 20
    19_2 --> 20
    19_2 --> 23
    3 --> 7_1[7_1 Gewöhnliche Differentialgleichungen]
    7_1 --> 7_2[7_2 Gewöhnliche Differentialgleichungen]
    7_2 --> 8[8 Partielle Differentialgleichungen]
    8 --> 9[9 Komplexe Funktionen]
    8 --> 12[12 Spezielle Funktionen]
    9 --> 12
    12 --> 18[18 Numerische Methoden]
    18 --> 22[22 Funktionalanalysis]
    18 --> 23
    22 --> 23
  
```





MATHEMATIK FÜR INGENIEURE, NATURWISSENSCHAFTLER,  
ÖKONOMEN UND LANDWIRTE · BAND 6

Herausgeber: Prof. Dr. O. Beyer, Magdeburg · Prof. Dr. H. Erfurth, Merseburg  
Prof. Dr. O. Greuel † · Prof. Dr. H. Kadner, Dresden  
Prof. Dr. K. Manteuffel, Magdeburg · Doz. Dr. G. Zeidler, Berlin

---

DOZ. DR. W. SCHÖNE

# Differentialgeometrie

4. AUFLAGE



BSB B. G. TEUBNER VERLAGSGESELLSCHAFT  
1987

Verantwortlicher Herausgeber:

1. und 2. Auflage: Prof. Dr. rer. nat. O. Greuel †

ab 3. Auflage: Dr. sc. nat. Otfried Beyer, ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule „Otto von Guericke“, Magdeburg

Autor:

Dr. rer. nat. W. Schöne, Dozent an der Technischen Hochschule Karl-Marx-Stadt

Als Lehrbuch für die Ausbildung an Universitäten und Hochschulen der DDR anerkannt.

Berlin, Dezember 1986

Minister für Hoch- und Fachschulwesen

Anerkanntes Lehrbuch seit der 1. Auflage 1975.

Schöne, Wolfgang:

Differentialgeometrie / Wolfgang Schöne. –

4. Aufl. – Leipzig : BSB Teubner, 1987. –

148 S. : 74 Abb.

(Mathematik für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Ökonomen und Landwirte; 6)

NE: GT

ISBN 3-322-00409-0

Math. Ing. Nat. wiss. Ökon. Landwirte, Bd. 6

ISSN 0138-1318

© BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1975

4. Auflage

VLN 294-375/50/87 · LSV 1044

Lektor: Dorothea Ziegler

Printed in the German Democratic Republic

Gesamtherstellung: INTERDRUCK Graphischer Großbetrieb, Leipzig

Betrieb der ausgezeichneten Qualitätsarbeit, III/18/97

Bestell-Nr. 665 717 1

00800

# Inhalt

1.	Einführung und Grundlagen .....	5
1.1.	Einleitung .....	5
1.2.	Grundbegriffe der Vektorrechnung .....	5
2.	Raumkurven .....	16
2.1.	Die Parameterdarstellung einer Raumkurve .....	16
2.2.	Parametertransformationen .....	18
2.3.	Die Bogenlänge einer Raumkurve .....	19
2.4.	Das begleitende Dreibein einer Raumkurve .....	20
2.5.	Die Schmieg Ebene einer Raumkurve .....	22
2.6.	Die Krümmung und Windung einer Raumkurve .....	25
2.7.	Die Frenetschen Formeln .....	28
2.8.	Der Darbouxsche Vektor .....	30
2.9.	Die gewöhnliche Schraubenlinie als Beispiel einer Raumkurve .....	32
2.10.	Die kanonischen Gleichungen einer Raumkurve .....	35
3.	Ebene Kurven .....	38
3.1.	Die Parameterdarstellung und Krümmung ebener Kurven .....	38
3.2.	Der Übergang von der Parameterdarstellung zur Kurvengleichung .....	43
3.3.	Beispiele .....	47
3.4.	Ebene Kurven in impliziter Form .....	53
3.5.	Ebene Kurven in Polarkoordinaten .....	56
3.6.	Die Lemniskate als Beispiel einer ebenen Kurve in Polarkoordinaten .....	59
3.7.	Evolute und Evolvente .....	63
3.8.	Hüllkurven .....	66
3.9.	Minimalkoordinaten .....	73
4.	Flächentheorie .....	75
4.1.	Grundbegriffe der Flächentheorie .....	75
4.1.1.	Zulässige Parameterdarstellungen .....	75
4.1.2.	Flächenkurven, Koordinatenlinien einer Fläche und die erste Grundform der Flächentheorie .....	78
4.1.3.	Parameterdarstellungen spezieller Flächen .....	80
4.1.4.	Die Bogenlänge einer Flächenkurve .....	83
4.1.5.	Tangentialebene und Flächennormalenvektor .....	84
4.1.6.	Der Schnittwinkel zweier Flächenkurven .....	85
4.1.7.	Die Berechnung von Flächeninhalten .....	87
4.1.8.	Koordinatentransformationen .....	89
4.2.	Die Krümmungstheorie der Flächen und Flächenkurven .....	94
4.2.1.	Die zweite Grundform der Flächentheorie .....	94
4.2.2.	Elliptisch, hyperbolisch und parabolisch gekrümmte Flächenstücke .....	96
4.2.3.	Der Satz von Meusnier .....	98
4.2.4.	Hauptkrümmungen und Krümmungslinien .....	100

4.2.5. Der Satz von Euler und die Dupinsche Indikatrix .....	104
4.2.6. Das Theorema egregium .....	106
4.2.7. Abbildungen, Abwicklungen und Regelflächen .....	106
4.2.8. Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve .....	110
4.2.9. Die stereographische Projektion .....	113
4.2.10. Die Abbildung von Bonne .....	116
Lösungen der Aufgaben .....	119
Literatur .....	144
Namen- und Sachregister .....	145



# 1. Einführung und Grundlagen

## 1.1. Einleitung

Der vorliegende Band über Differentialgeometrie enthält die für praktische Anwendungen wichtigsten Bestandteile der Theorie der ebenen Kurven, der Raumkurven und der Flächen. Dabei mußte berücksichtigt werden, daß die Differentialgeometrie für sehr unterschiedliche Anwendungsgebiete von Interesse ist.

Als solche Anwendungsgebiete kommen hauptsächlich Geodäsie, Maschinenbau und Physik in Betracht. Für die Geodäsie dürfte die Flächentheorie einschließlich der Theorie der Abbildungen am wichtigsten sein. Für den Maschinenbau sind es die ebenen Kurven und Raumkurven, die bei ebenen und räumlichen Bewegungsvorgängen auftreten, aber auch die Flächentheorie, die überall dort ins Spiel kommt, wo es um die Gestaltung der Oberflächen von technischen Objekten geht, so z. B. bei Schneckengetrieben, bei achsversetzten Kegelrädern u. ä. In der Physik sind es gleichfalls ebene Kurven und Raumkurven, sowie die Gaußschen Koordinatensysteme und ihre dreidimensionalen Verallgemeinerungen, die als spezielle Koordinatensysteme bei den verschiedensten physikalischen Problemen benötigt werden. Auch die Relativitätstheorie wird leichter verständlich bei Kenntnis differentialgeometrischer Zusammenhänge.

Jedoch erhebt diese Aufzählung keineswegs den Anspruch auf Vollständigkeit. Beispielsweise hat die stereographische Projektion Bedeutung für die Mineralogie, und die Theorie der Raumkurven hat sogar Anwendung in der Textiltechnik gefunden. Vielmehr sollte man daraus erkennen, daß es sehr schwierig ist, allen Ansprüchen gerecht zu werden und daß deshalb Kompromisse unvermeidlich waren.

Im Abschnitt 1.2. werden die für die Differentialgeometrie wichtigsten Grundlagen der Vektorrechnung zusammengestellt. Dadurch soll erreicht werden, daß der mit der Vektorrechnung weniger vertraute Leser die Kapitel über Kurven und Flächen besser versteht. Wegen einer ausführlichen Begründung der angeführten Formeln sei auf Band 13 „Lineare Algebra“ dieser Reihe verwiesen. Zur Vertiefung des Stoffes, zur Anregung und Weiterbildung des Lesers sind dem Text eine Anzahl von Aufgaben beigegeben, deren Lösung am Ende des Buches mitgeteilt wird.

Schließlich möchte der Autor es nicht versäumen, Herrn Prof. Geise, Herrn Prof. Volmer und Herrn Prof. Greuel für wertvolle Hinweise und Anregungen zu danken. Desgleichen danke ich dem Verlag, insbesondere Herrn Dr. Thiele und Frau Ziegler, für das mir entgegengebrachte Verständnis. In der 3. Auflage konnten einige Mängel, auf die mich Frau Dr. S. Meyer und Herr Prof. Sulanke aufmerksam machten, beseitigt werden. Für ihre Hinweise sei diesen Kollegen gedankt.

## 1.2. Grundbegriffe der Vektorrechnung

Da die Vektorrechnung für den Aufbau der Differentialgeometrie der Raumkurven wie auch der Flächen ein nützliches Hilfsmittel darstellt, sollen in diesem einleitenden Kapitel die wichtigsten Eigenschaften von Vektoren und einige später benötigte Gleichungen behandelt werden (vgl. auch Band 11 dieser Reihe).

Wir gehen von einem *dreidimensionalen euklidischen Raum*  $E^3$  aus, in dem ein orthogonales, kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung  $O$  und den drei

paarweise zueinander senkrechten Achsen  $x_1, x_2, x_3$  gegeben ist. Ein **Vektor** des  $E^3$  ist eine Größe, die durch *Betrag*, *Richtung* und *Richtungssinn* bestimmt ist. Man kann einen Vektor des  $E^3$  veranschaulichen<sup>1)</sup>, indem man ihn als eine gerichtete Strecke auffaßt, die im Raum parallel zu sich selbst beliebig verschoben werden kann. Die Länge dieser gerichteten Strecke ist dann gleich dem Betrag des Vektors. Da die gerichtete Strecke in jeder Lage auf einer bestimmten Geraden des  $E^3$  liegt, diese Geraden aber alle zueinander parallel sind, d. h. dieselbe Richtung haben, wird die Richtung dieser parallelen Geraden als Richtung des Vektors bezeichnet. Schließlich ist der gerichteten Strecke stets ein *positiver Durchlaufssinn* zugeordnet, der durch einen Pfeil gekennzeichnet wird. Durch diesen Pfeil wird erklärt, welcher der beiden Endpunkte der gerichteten Strecke der Startpunkt und welcher der Zielpunkt ist, so daß eine Durchlaufung der gerichteten Strecke im positiven Sinn so erfolgt, daß sie beim *Startpunkt* beginnt und beim *Zielpunkt* endet. Dieser positive Durchlaufssinn der gerichteten Strecke wird als Richtungssinn des Vektors bezeichnet.

Wir betrachten nun eine spezielle Lage der einen Vektor  $\mathbf{u}$  darstellenden gerichteten Strecke  $AB$ , wobei  $A$  der Startpunkt und  $B$  der Zielpunkt dieser gerichteten Strecke sein soll. Sind  $a_1, a_2, a_3$  die Koordinaten von  $A$  und  $b_1, b_2, b_3$  diejenigen von  $B$ ,

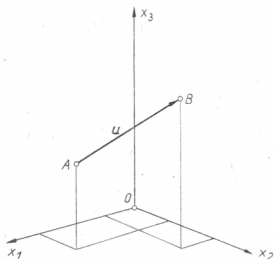


Bild 1.1. Veranschaulichung eines Vektors

so stellt das Zahlentripel  $(u_1, u_2, u_3)$  mit  $u_1 = b_1 - a_1, u_2 = b_2 - a_2, u_3 = b_3 - a_3$  den Vektor  $\mathbf{u}$  dar. An diesen drei Zahlen ändert sich nichts, wenn man die gerichtete Strecke parallel zu sich selbst im Raum verschiebt. Man schreibt  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  und nennt die drei Zahlen  $u_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Koordinaten (Komponenten)<sup>2)</sup> des Vektors  $\mathbf{u}$ . Der Vektor mit den Koordinaten  $0, 0, 0$  heißt **Nullvektor** und wird mit  $\mathbf{o}$  bezeichnet. Der Nullvektor hat den Betrag 0, jedoch keine Richtung und keinen Richtungssinn. Ein Vektor des  $E^3$  ist somit durch drei Zahlenangaben bestimmt. Analog dazu ist ein Vektor des  $E^2$  durch zwei Zahlenangaben bestimmt.

Zwei Vektoren  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  heißen gleich, wenn die ihnen entsprechenden gerichteten Strecken gleiche Länge, gleiche Richtung und gleichen Durchlaufssinn haben oder wenn jede Koordinate des einen Vektors gleich der ent-

<sup>1)</sup> Daß man einen Vektor als gerichtete Strecke veranschaulichen kann, bedeutet nicht, daß er selbst eine gerichtete Strecke ist. Vielmehr ist ein Vektor eine *arithmetische* Größe, die Rechengesetzen genügt, die in der Geometrie ihre Entsprechung haben.

<sup>2)</sup> In vielen Büchern werden die Koordinaten des Vektors als skalare Komponenten bezeichnet.

sprechenden Koordinate des anderen Vektors ist. Das heißt, es ist  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$  genau dann, wenn  $u_1 = v_1, u_2 = v_2, u_3 = v_3$  ist.

Eine Größe, die durch die Angabe einer einzigen Zahl bestimmt ist, bezeichnet man als einen **Skalar**. Zum Beispiel ist der Betrag eines Vektors stets ein Skalar.

Ist  $\lambda$  ein Skalar und  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  ein Vektor, so versteht man unter  $\lambda \mathbf{u}$  den Vektor mit den Koordinaten  $\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3$ . Ist  $\lambda > 0$ , so wird der Vektor  $\lambda \mathbf{u}$  durch eine gerichtete Strecke dargestellt, die denselben Durchlaufssinn und dieselbe Richtung hat wie die den Vektor  $\mathbf{u}$  darstellende gerichtete Strecke, deren Länge aber das  $\lambda$ -fache der Länge der  $\mathbf{u}$  darstellenden gerichteten Strecke beträgt. Ist dagegen  $\lambda < 0$ , so ist  $-\lambda$  eine positive Zahl. Daher hat die gerichtete Strecke, die den Vektor  $\lambda \mathbf{u}$  darstellt, eine Länge, die gleich dem  $(-\lambda)$ -fachen der den Vektor  $\mathbf{u}$  darstellenden gerichteten Strecke ist. Außerdem hat  $\lambda \mathbf{u}$  die gleiche Richtung, aber den entgegengesetzten Richtungssinn wie der Vektor  $\mathbf{u}$  (vgl. Bild 1.2). Hieraus folgt

$$|\lambda \mathbf{u}| = |\lambda| |\mathbf{u}|.$$

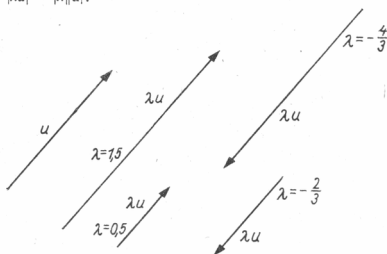


Bild 1.2. Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

Für zwei beliebige Skalare  $\lambda, \mu$  gilt:

$$\begin{aligned} (\lambda\mu) \mathbf{u} &= (\lambda\mu u_1, \lambda\mu u_2, \lambda\mu u_3) = \lambda(\mu u_1, \mu u_2, \mu u_3) = \lambda(\mu \mathbf{u}) \\ &= (\mu \lambda u_1, \mu \lambda u_2, \mu \lambda u_3) = \mu(\lambda u_1, \lambda u_2, \lambda u_3) = \mu(\lambda \mathbf{u}). \end{aligned}$$

Sind  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  und  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$  zwei Vektoren, so kann man beide addieren. Der Vektor  $\mathbf{u} + \mathbf{v}$  ist der Vektor mit den Koordinaten  $u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3$ . Dieser Addition entspricht die Addition der die Vektoren  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  darstellenden gerichteten Strecken mit dem gleichen Startpunkt nach dem Parallelogrammgesetz (siehe Bild 1.3).

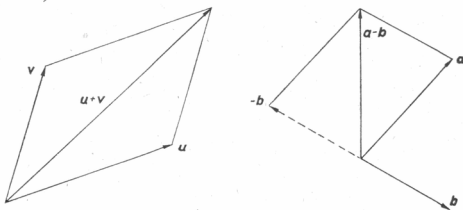


Bild 1.3. Geometrische Veranschaulichung der Addition und Subtraktion von Vektoren

Es gilt dann stets

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u}.$$

Denn es ist

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{u} &= (v_1 + u_1, v_2 + u_2, v_3 + u_3) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3) \\ &= \mathbf{u} + \mathbf{v}. \end{aligned}$$

Ebenso beweist man

$$(\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w} = \mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}).$$

Ein Vektor  $\mathbf{u}$  heißt **Einheitsvektor**, wenn sein Betrag, der mit  $u$  bezeichnet werden soll, gleich 1 ist. Die gerichtete Strecke, die einen Einheitsvektor darstellt, hat stets die Länge 1. Es seien  $E_1, E_2, E_3$  die auf der  $x_1$ - bzw.  $x_2$ - bzw.  $x_3$ -Achse liegenden Einheitspunkte mit den Koordinaten  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ . Der gerichteten Strecke  $\overrightarrow{OE_1}$  entspreche der Einheitsvektor  $\mathbf{i}$ . Mit  $\mathbf{j}$  bzw.  $\mathbf{k}$  werden die Einheitsvektoren bezeichnet, die durch die gerichteten Strecken  $\overrightarrow{OE_2}$  bzw.  $\overrightarrow{OE_3}$  dargestellt werden. Es gilt dann

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Mit Hilfe der Einheitsvektoren  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  kann ein Vektor  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  in der Form

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{i} + u_2 \mathbf{j} + u_3 \mathbf{k} \tag{1.1}$$

geschrieben werden.<sup>1)</sup> Diese Darstellung ist eindeutig, wenn alle Vektoren auf ein und dasselbe Koordinatensystem bezogen werden. Man bezeichnet  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  als **Basisvektoren**. Basisvektoren müssen jedoch nicht unbedingt Einheitsvektoren sein. Ist dies der Fall, so heißen die Basisvektoren **normiert**.

Damit aber drei Vektoren im  $E^3$  eine Basis bilden können, müssen sie **linear unabhängig** sein. Man sagt, daß  $r$  Vektoren  $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$  linear unabhängig sind, wenn aus der Gleichung

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_r \mathbf{a}_r = \mathbf{0},$$

wo  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$  Zahlen sind, stets folgt, daß

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_r = 0$$

ist. Andernfalls heißen die Vektoren **linear abhängig**. Im  $E^3$  sind die Vektoren  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  linear unabhängig. Vier oder mehr Vektoren des  $E^3$  sind aber stets linear abhängig. Drei Vektoren, von denen keiner der Nullvektor ist, sind linear abhängig, wenn mindestens zwei dieselbe Richtung haben oder wenn alle drei parallel zu einer Ebene sind.

Das **skalare Produkt** der Vektoren  $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$  ist durch folgende Gleichung definiert:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \gamma. \tag{1.2}$$

<sup>1)</sup> Die Größe  $u_i$  wird vielfach als vektorielle Komponente des Vektors  $\mathbf{u}$  in Richtung des Vektors  $\mathbf{i}$  bezeichnet.



Stellt man  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  durch gerichtete Strecken dar, die vom gleichen Startpunkt ausgehen, so ist  $\gamma$  der Winkel, der von diesen beiden gerichteten Strecken gebildet wird, und  $|\mathbf{a}|$ ,  $|\mathbf{b}|$  sind die Längen der beiden gerichteten Strecken. Da man beide gerichteten Strecken immer in der beschriebenen Weise wählen kann, nennt man  $\gamma$  den von den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gebildeten Winkel und schreibt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Das Ergebnis der skalaren Multiplikation zweier Vektoren ist stets ein Skalar. Offensichtlich gilt

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \text{ (Kommutatives Gesetz).}$$

Außerdem gilt auch das *distributive Gesetz*

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}.$$

Zwei Vektoren heißen zueinander **orthogonal**, wenn die ihnen entsprechenden gerichteten Strecken, falls man sie so wählt, daß sie den gleichen Startpunkt haben, aufeinander senkrecht stehen. Sind zwei Vektoren zueinander orthogonal, so verschwindet ihr Skalarprodukt. Ist dagegen das Skalarprodukt der Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  gleich null, d. h. gilt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ , so sind drei Fälle möglich:

- 1) Einer der Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  ist der Nullvektor.
- 2) Beide Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  sind Nullvektoren.
- 3) Die Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  sind zueinander orthogonal.

Aus dem Verschwinden eines skalaren Produktes kann daher nur dann auf die Orthogonalität der zwei Faktoren geschlossen werden, wenn keiner von ihnen der Nullvektor ist.

Die Einheitsvektoren  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  sind paarweise zueinander orthogonal. Daher gilt  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0$ . Andererseits gilt  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = |\mathbf{i}| |\mathbf{i}| \cos(\mathbf{i}, \mathbf{i})$ . Wegen  $\cos(\mathbf{i}, \mathbf{i}) = 1$  folgt daher  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1$ . Ebenso ist  $\mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$  und  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$ . Ein System von paarweise orthogonalen Basisvektoren heißt eine **orthogonale Basis**. Die von  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  gebildete Basis ist orthogonal und normiert. Eine solche Basis nennt man auch bisweilen **orthonormiert** oder **orthonormal**.

Sind  $\lambda$  ein beliebiger Skalar und  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  irgend zwei Vektoren, so gilt

$$(\lambda \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (\lambda \mathbf{b}).$$

Für das Skalarprodukt der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  erhält man, weil die Vektoren  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{k}$  eine orthonormierte Basis bilden und weil das distributive Gesetz und die eben abgeleitete Beziehung gelten,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) \\ &= a_1 b_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + a_1 b_2 \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + a_1 b_3 \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} + a_2 b_1 \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + a_2 b_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} \\ &\quad + a_2 b_3 \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} + a_3 b_1 \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} + a_3 b_2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} + a_3 b_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot (b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3.$$

Für den Betrag des Vektors  $\mathbf{a}$  folgt aus

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) \cdot (a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k}) = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$$

und

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2$$

die Beziehung

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}. \quad (1.3)$$

Das **Vektorprodukt** der Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  wird mit  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  (lies a Kreuz b) bezeichnet. Der Vektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ist zu den Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  orthogonal. Sein Betrag ist gleich dem Flächeninhalt eines Parallelogrammes, das mit Hilfe der Vektoren  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gebildet werden kann, wenn man sie durch gerichtete Strecken mit dem gleichen Startpunkt  $X$  darstellt. Dazu zieht man durch die Zielpunkte der beiden gerichteten Strecken je eine Parallele zur anderen Strecke. Die beiden Parallelen schneiden sich in einem Punkt  $D$ , der zusammen mit  $X$  und den beiden Zielpunkten der gerichteten Strecken die Eckpunkte des erwähnten Parallelogramms darstellt. Sein Flächeninhalt ergibt sich zu  $F = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ . Damit erhält man

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Der Richtungssinn von  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  wird wie folgt festgelegt:

Trägt man den Vektor  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  ebenfalls von  $X$  aus als gerichtete Strecke ab, so steht diese auf der von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gebildeten Ebene senkrecht. Dreht man den Vektor  $\mathbf{a}$  um den Punkt  $X$  in der von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{b}$  gebildeten Ebene, so daß er mit  $\mathbf{b}$  zur Deckung kommt und ist der von  $\mathbf{a}$  bei der Drehung überstrichene Winkel der kleinere der beiden möglichen Drehwinkel, so ist die Spitze des Vektors  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  so zu wählen,

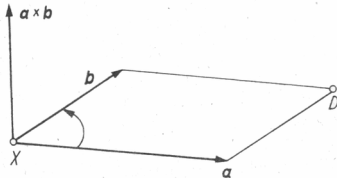


Bild 1.4. Das vektorielle Produkt zweier Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$

daß die erwähnte Drehung des Vektors  $\mathbf{a}$  von der Spitze des Vektors  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  aus betrachtet als eine zum Uhrzeigersinn entgegengesetzte Drehung erscheint. Es gilt daher

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}).$$

Ohne Beweis sei angeführt, daß für die vektorielle Multiplikation das *distributive Gesetz* (vgl. [4], S. 38)

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad \text{bzw.} \quad (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}.$$

Sind  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  zwei Vektoren, die auf die orthonormale Basis  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  bezogen sind, so gilt

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Hieraus erhält man durch Entwicklung nach der ersten Zeile der Determinante

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{i}(a_2b_3 - a_3b_2) + \mathbf{j}(a_3b_1 - a_1b_3) + \mathbf{k}(a_1b_2 - a_2b_1).$$

Man erkennt, daß das Vektorprodukt verschwindet, wenn die zwei Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  die gleiche Richtung haben, das heißt, wenn  $a_1 : a_2 : a_3 = b_1 : b_2 : b_3$  ist oder wenn  $\sin(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 0$  ist oder wenn einer oder beide Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  Nullvektoren sind. Insbesondere gilt

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}.$$

Außerdem gilt

$$(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\lambda \mathbf{b}).$$

Es gilt aber nicht das assoziative Gesetz  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ .

Unter dem gemischten Produkt oder **Spatprodukt** der drei Vektoren, die auf die Basis  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  bezogen sind, wobei

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$$

ist, versteht man den Ausdruck

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}). \quad (1.4)$$

Da eine Determinante ihr Vorzeichen wechselt, wenn man zwei Zeilen miteinander vertauscht, folgt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}), \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b})$$

und

$$(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = (\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}) = (\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}), \quad (\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}).$$

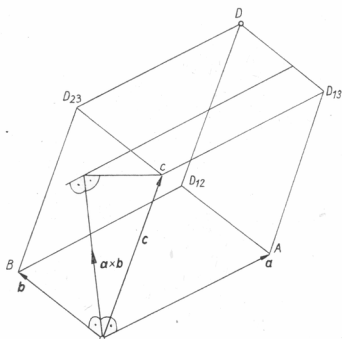
Geometrisch ist das Spatprodukt  $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$  gleich dem Volumen des von den Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$  bestimmten Spates<sup>1)</sup>. Man kann einen solchen Spat als ein schiefes Prisma mit der Grundfläche des aus den Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  gebildeten Parallelogramms (siehe Definition des Vektorproduktes und Bild 1.5) ansehen. Die parallelen Kanten dieses Prismas gehen durch die vier Eckpunkte des Parallelogramms und sind zum Vektor  $\mathbf{c}$  parallel. Die Deckfläche des Prismas ist ein zur Grundfläche kongruentes Parallelogramm. Der Abstand von Grund- und Deckfläche ist die Höhe  $h$  des Prismas. Dann gilt für das Volumen  $V$  dieses Körpers  $V = Fh$ , wobei  $F$  den Flächeninhalt der Grund-

fläche bedeutet. Es ist  $\frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}$  ein Einheitsvektor in Richtung von  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ . Dann gilt

$h = \frac{\mathbf{a} \times \mathbf{b}}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \cdot \mathbf{c}$  mit  $h \geq 0$ , falls  $\angle(\mathbf{a} \times \mathbf{b}, \mathbf{c}) \leq \frac{\pi}{2}$ , andernfalls  $h < 0$ . Demnach folgt

$$V = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \frac{(\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|} \cdot \mathbf{c} \quad \text{oder wie behauptet} \quad V = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}.$$

<sup>1)</sup> Dabei ist das Volumen des Spates als eine skalare Größe zu betrachten, die positiv oder negativ ist, je nachdem, ob der Winkel zwischen den Vektoren  $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$  und  $\mathbf{c}$  spitz oder stumpf ist.

Bild 1.5. Der durch drei Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ , bestimmte Spat

Sehr oft braucht man auch den sogenannten *Entwicklungssatz*. Er lautet

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a}. \quad (1.5)$$

Entsprechend gilt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}.$$

Man merkt sich beide Formeln leicht dadurch, daß auf der rechten Seite die Vektoren außerhalb der Skalarprodukte vorkommen, die auf der linken Seite in der Klammer stehen. Dabei kommt auf der rechten Seite immer der Vektor außerhalb der Skalarprodukte als erster vor, der auf der linken Seite als mittlerer Faktor auftritt. Offensichtlich ist  $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ , was man leicht einsieht, wenn man  $\mathbf{a} = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{j}$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{k}$  setzt.

Mit Hilfe des Entwicklungssatzes kann man auch die Produkte

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \quad \text{und} \quad (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$$

berechnen. Man erhält

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}). \quad (1.6)$$

Ist  $\mathbf{c} = \mathbf{a}$ ,  $\mathbf{d} = \mathbf{b}$ , so folgt daraus

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})(\mathbf{b} \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2. \quad (1.7)$$

Für das zweite Produkt ergibt sich mit der Abkürzung  $\mathbf{c} \times \mathbf{d} = \mathbf{f}$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{f} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{f}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{f}) \mathbf{a}$$

oder ausführlich geschrieben

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}, \mathbf{d}) \mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}, \mathbf{d}) \mathbf{a}.$$



Als nächstes soll auf eine elementargeometrische Beziehung hingewiesen werden, die beim Kreis eine Rolle spielt.

Es sei ein Kreis  $k$  mit dem Mittelpunkt  $O$  und dem Radius  $r$  gegeben. Auf  $k$  liegen zwei Punkte  $A$  und  $B$ . Einer der beiden durch  $A, B$  begrenzten Kreisbögen werde mit  $b$ , seine Länge mit  $s$  bezeichnet. Durchläuft der Punkt  $X$  den Bogen  $b$  von  $A$  nach  $B$ , so überstreicht der Strahl  $OX$  den zu  $b$  gehörigen Zentriwinkel  $\sphericalangle AOB$ . Zeichnet man noch den zu  $k$  konzentrischen Einheitskreis  $\bar{k}$  (Mittelpunkt  $O$ , Radius 1) und sind  $\bar{A}, \bar{B}$  die Schnittpunkte der Strahlen  $OA, OB$  mit dem Einheitskreis, so ist das Bogenmaß des Winkels  $\sphericalangle AOB$  gleich der Länge  $\bar{s}$  des zum Zentriwinkel  $\sphericalangle \bar{A}\bar{O}\bar{B}$  gehörenden, durch  $\bar{A}$  und  $\bar{B}$  begrenzten Bogens  $\bar{b}$  des Einheitskreises. Das Bogenmaß des Winkels  $\sphericalangle AOB$  soll mit  $\alpha$  bezeichnet werden. Es ist daher  $\alpha = \bar{s}$ . Das Bogenmaß des Zentriwinkels, der zum vollen Kreisbogen gehört, ist  $2\pi$ . Da sich die Länge  $s$  des zwischen  $A, B$  liegenden Kreisbogens  $b$  zur Länge des gesamten Kreises  $k$  wie die zugehörigen Zentriwinkel verhält, folgt

$$s : 2r\pi = \alpha : 2\pi$$

oder

$$s = r\alpha.$$

Durch Differentiation ergibt sich hieraus  $ds = r d\alpha$  (Bild 1.6).

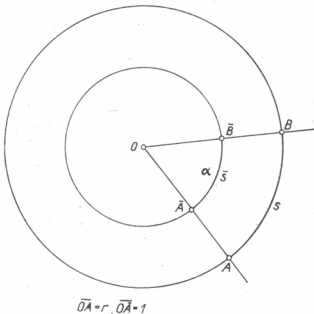


Bild 1.6. Länge eines Kreisbogens

Ist  $\mathbf{u}(t) = u_1(t)\mathbf{i} + u_2(t)\mathbf{j} + u_3(t)\mathbf{k}$  ein Vektor, der von einem Parameter  $t$  abhängt, und sind die drei Funktionen  $u_i(t)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) stetig differenzierbar nach  $t$ , so kann man den Ableitungsvektor

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \dot{u}_1(t)\mathbf{i} + \dot{u}_2(t)\mathbf{j} + \dot{u}_3(t)\mathbf{k}$$

bilden. Für zwei von einem Parameter  $t$  abhängige Vektoren gilt dann die Produktregel

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})' = \dot{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}}$$

bzw.

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v})' = \dot{\mathbf{u}} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \dot{\mathbf{v}}.$$

In der letzten Gleichung darf die Reihenfolge der Faktoren nicht vertauscht werden. Ist  $\mathbf{a}(t)$  ein von  $t$  abhängiger Einheitsvektor und läßt sich  $\dot{\mathbf{a}}(t)$  bilden und ist vom Nullvektor verschieden, so ergibt sich  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 1$  und hieraus  $\dot{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{a}} = 0$ . Da beim skalaren Produkt die Faktoren vertauscht werden dürfen, folgt  $2\mathbf{a} \cdot \dot{\mathbf{a}} = 0$ . Nun ist  $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$  und  $\dot{\mathbf{a}} \neq \mathbf{0}$ . Daher sind  $\mathbf{a}$  und  $\dot{\mathbf{a}}$  zueinander orthogonal. Außerdem gilt wegen  $d\mathbf{a} = \dot{\mathbf{a}} dt$ , daß auch  $d\mathbf{a}$  auf  $\mathbf{a}$  senkrecht steht. Bezeichnet man daher das Bogenmaß des von  $\mathbf{a}$  und  $\mathbf{a} + d\mathbf{a}$  gebildeten Winkels mit  $d\alpha$ , so gilt  $|d\mathbf{a}| = d\alpha$  (Bild 1.7).

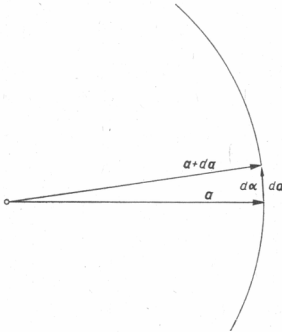


Bild 1.7. Das Differential eines Einheitsvektors und seine geometrische Veranschaulichung

Unter einem **Ortsvektor** versteht man eine gerichtete Strecke, deren Startpunkt der Koordinatenursprung und deren Zielpunkt ein beliebiger Punkt des Raumes ist (Bild 1.8). Genau genommen ist ein Ortsvektor kein Vektor im Sinn unserer Definition,

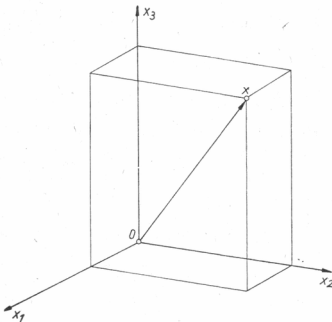


Bild 1.8. Der Ortsvektor eines Punktes  $X$

denn er ist eine gerichtete Strecke mit dem festen Startpunkt  $O$ , während ein Vektor durch eine verschiebbare gerichtete Strecke dargestellt wird. Jedem Punkt des Raumes kann ein Ortsvektor zugeordnet werden. Hat  $X$  die Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$ , so ist durch  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$  ein Vektor gegeben, der durch die gerichtete Strecke  $\vec{OX}$  veranschaulicht werden kann. Diese gerichtete Strecke stellt aber den Ortsvektor des Punktes  $X$  dar. Umgekehrt kann jeder Vektor des  $E^3$  durch eine gerichtete Strecke veranschaulicht werden, die der Ortsvektor eines durch diesen Vektor bestimmten Punktes ist. Ist beispielsweise  $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$  ein Vektor des  $E^3$ , so wird durch ihn ein Punkt  $U$  mit den Koordinaten  $u_1, u_2, u_3$  bestimmt. Die gerichtete Strecke  $\vec{OU}$  ist der Ortsvektor des Punktes  $U$  und veranschaulicht außerdem den Vektor  $\mathbf{u}$ .

In der Differentialgeometrie werden Kurven und Flächen durch Vektoren, die noch von gewissen Parametern abhängen, dargestellt. Diese Vektoren werden stets durch Ortsvektoren veranschaulicht. Die Spitzen der diesen Ortsvektoren entsprechenden Pfeile beschreiben das jeweilige geometrische Gebilde. Wir wollen daher solche Vektoren als die das *geometrische Gebilde beschreibenden Vektoren* bezeichnen. Differenziert man einen solchen ein geometrisches Gebilde beschreibenden Vektor nach den Parametern, von denen er abhängt, so erhält man neue Vektoren – die Ableitungsvektoren. Diese werden durch gerichtete Strecken dargestellt, die ihren Startpunkt im Endpunkt des Ortsvektors haben, der den das geometrische Gebilde beschreibenden Vektor veranschaulicht.

## 2. Raumkurven

### 2.1. Die Parameterdarstellung einer Raumkurve

Es werde im dreidimensionalen euklidischen Raum  $E^3$  ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem mit dem Ursprung  $O$  und den drei Koordinatenachsen  $x_1, x_2, x_3$  betrachtet. Ein beliebiger Punkt  $X$  des Raumes wird durch drei Zahlen  $x_1, x_2, x_3$  – seine *Koordinaten* – bestimmt. Wir können die drei Koordinaten zu einem Vektor  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  zusammenfassen. Dieser Vektor kann durch eine gerichtete Strecke mit dem Anfangspunkt (Startpunkt)  $O$  und dem Endpunkt (Zielpunkt)  $X$  veranschaulicht werden, die mit einem positiven Durchlaufssinn von  $O$  nach  $X$  versehen ist und mit  $\overrightarrow{OX}$  bezeichnet werden soll. Diese gerichtete Strecke ist der *Ortsvektor* des Punktes  $X$ . Führt man die drei paarweise orthogonalen Einheitsvektoren  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ , ein, so erhält man die Darstellung

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{i} + x_2 \mathbf{j} + x_3 \mathbf{k}. \quad (2.1)$$

Wir wollen nun annehmen, daß die drei Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  eindeutige, reelle und differenzierbare Funktionen eines reellen Parameters  $t$  mit  $a \leq t \leq b$  sind. Der Vektor  $\mathbf{x}$  hängt dann von dem Parameter  $t$  ab, was wir durch die Schreibweise

$$\mathbf{x}(t) = x_1(t) \mathbf{i} + x_2(t) \mathbf{j} + x_3(t) \mathbf{k} \quad (2.2)$$

bzw. durch

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

ausdrücken wollen. Außerdem sollen die Ableitungen  $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t)$  der drei Funktionen  $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$  nach dem Parameter  $t$  nicht alle drei an derselben Stelle verschwinden. Erfüllt die vektorielle Funktion  $\mathbf{x}(t)$  die genannten Voraussetzungen, so soll  $\mathbf{x}(t)$  eine **zulässige Parameterdarstellung** heißen. Sind überdies alle drei Funktionen  $x_i(t)$   $r$ -mal ( $r \geq 1$ ) stetig differenzierbar, so soll  $\mathbf{x}(t)$  eine **zulässige Parameterdarstellung der Klasse  $r$**  heißen. Durchläuft der Parameter  $t$  alle Werte des Intervalls  $[a, b]$ , wobei anstelle von  $[a, b]$  auch die Menge aller reellen Zahlen treten kann, so beschreibt der Endpunkt  $X$  des Ortsvektors  $\mathbf{x} = \overrightarrow{OX}$  eine Kurve<sup>1)</sup>  $c$ . Diese

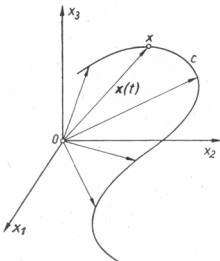


Bild 2.1. Darstellung einer Raumkurve durch Ortsvektoren

<sup>1)</sup> Diese Kurve heißt auch Hodograph der vektoriellen Funktion  $\mathbf{x}(t)$  (vgl. [10], S. 6).

Kurve ist, wenn die Funktionen  $x_i(t)$  keine Gleichung der Form  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$  mit konstanten Koeffizienten  $a_i$  (nicht alle null) für jedes  $t \in [a, b]$  erfüllen, eine **Raumkurve**. Das ist eine Kurve, die sich zwar in den dreidimensionalen Raum, aber nicht in eine Ebene dieses Raumes einbetten läßt. Die Gleichung  $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4 = 0$  stellt eine Ebene dar, und wenn die Größen  $x_i(t)$  diese Gleichung für alle  $t$  erfüllten, so läge die durch  $\mathbf{x}(t)$  gegebene Kurve in dieser Ebene und wäre eine ebene Kurve. Im folgenden sollen aber die ebenen Kurven als spezielle Raumkurven aufgefaßt werden.

Faßt man den Parameter  $t$  als Zeit auf, so wird durch  $\mathbf{x}(t)$  die Bewegung des Punktes  $X$  auf der durch  $\mathbf{x}(t)$  dargestellten Raumkurve beschrieben. In jedem Zeitpunkt  $t$  befindet sich der Punkt  $X$  an der Stelle der Raumkurve, die durch den Ortsvektor  $\mathbf{x}(t)$  eindeutig festgelegt wird. Betrachtet man den Zeitpunkt  $t$  und den darauf folgenden Zeitpunkt  $t + \Delta t$ , so kann man den Differenzvektor

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t) \quad (2.3)$$

bilden. Der Vektor  $\Delta \mathbf{x}$  kann durch die gerichtete Strecke  $\overrightarrow{XX'}$  veranschaulicht werden, die den Endpunkt  $X$  des Ortsvektors  $\mathbf{x}(t)$  mit dem Endpunkt  $X'$  des Ortsvektors  $\mathbf{x}(t + \Delta t)$  verbindet. Die Gerade  $XX'$  stellt eine Sekante des Kurvenbogens von  $X$  nach  $X'$  dar. Strebt  $\Delta t$  gegen null, so rückt der Punkt  $X'$  auf der Kurve  $c$  gegen den Punkt  $X$  und die Sekante  $XX'$  geht in die **Tangente**  $t_X$  der Kurve  $c$  im Punkt  $X$  über. Um einen Richtungsvektor dieser Tangente  $t_X$  zu erhalten, bildet man

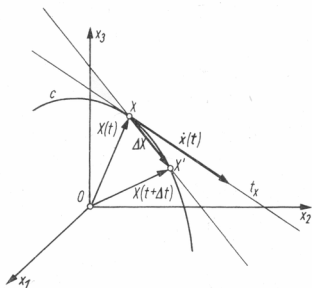
$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{x}(t + \Delta t) - \mathbf{x}(t)}{\Delta t} \quad (2.4)$$

Der Grenzwert lautet ausführlich geschrieben

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_1(t + \Delta t) \mathbf{i} + x_2(t + \Delta t) \mathbf{j} + x_3(t + \Delta t) \mathbf{k} - x_1(t) \mathbf{i} - x_2(t) \mathbf{j} - x_3(t) \mathbf{k}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[ \frac{x_1(t + \Delta t) - x_1(t)}{\Delta t} \mathbf{i} + \frac{x_2(t + \Delta t) - x_2(t)}{\Delta t} \mathbf{j} + \frac{x_3(t + \Delta t) - x_3(t)}{\Delta t} \mathbf{k} \right] \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_1(t + \Delta t) - x_1(t)}{\Delta t} \mathbf{i} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_2(t + \Delta t) - x_2(t)}{\Delta t} \mathbf{j} \\ & \quad + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x_3(t + \Delta t) - x_3(t)}{\Delta t} \mathbf{k} = \frac{dx_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{dx_2}{dt} \mathbf{j} + \frac{dx_3}{dt} \mathbf{k} \\ &= \dot{x}_1(t) \mathbf{i} + \dot{x}_2(t) \mathbf{j} + \dot{x}_3(t) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

$$\text{Hieraus folgt schließlich } \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{x}_1(t) \mathbf{i} + \dot{x}_2(t) \mathbf{j} + \dot{x}_3(t) \mathbf{k}. \quad (2.5)$$

Der Vektor  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  hat die Richtung der Tangente an die Raumkurve im Punkt  $X$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}(t)$  (Bild 2.2). Weitere Eigenschaften dieses Vektors werden im Abschnitt 2.3. behandelt.

Bild 2.2. Die Vektoren  $\Delta \mathbf{x}$  und  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  und ihre geometrische Bedeutung

## 2.2. Parametertransformationen

Ist eine Raumkurve  $c$  durch die zulässige Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  von der Klasse  $r \geq 1$  gegeben, wobei  $a \leq t \leq b$  gelten möge, so kann man einen neuen Parameter  $\tau$  einführen. Dies geschieht durch die folgende Transformation. Es sei  $t(\tau)$  eine Funktion, die für alle  $\tau$  mit  $\alpha \leq \tau \leq \beta$  definiert und dort auch stetig differenzierbar ist. Der Wertevorrat der Funktion  $t(\tau)$  sei das Intervall  $[a, b]$ . Dabei ist entweder  $t(\alpha) = a$ ,  $t(\beta) = b$  oder  $t(\alpha) = b$ ,  $t(\beta) = a$  und außerdem

$$\frac{dt}{d\tau} \neq 0 \text{ für alle } \tau \in [\alpha, \beta]. \quad (2.6)$$

Eine derartige Funktion  $t(\tau)$  heißt eine **zulässige Parametertransformation**. Die Funktion  $t(\tau)$  heißt eine zulässige Parametertransformation der Klasse  $r$ , wenn sie  $r$ -mal stetig differenzierbar ist. Die zulässige Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ , die im Intervall  $[a, b]$  definiert ist, geht durch die zulässige Parametertransformation  $t(\tau)$  in eine andere zulässige Parameterdarstellung

$$\bar{\mathbf{x}}(\tau) = \mathbf{x}(t(\tau)) \quad (2.7)$$

über, die im Intervall  $[\alpha, \beta]$  definiert ist. Zwei derartige Parameterdarstellungen heißen zueinander *äquivalent*. Sie stellen geometrisch dasselbe Kurvenstück bzw. dieselbe Kurve dar. Es gilt

$$\frac{d\bar{\mathbf{x}}}{d\tau} = \dot{\bar{\mathbf{x}}}(\tau) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \dot{\mathbf{x}}(t) \frac{dt}{d\tau}. \quad (2.8)$$

Man kann sich die Tatsache, daß dieselbe Kurve durch zwei verschiedene äquivalente Parameterdarstellungen gegeben sein kann, dadurch veranschaulichen, daß man  $t$  und  $\tau$  als Zeit deutet. Dann beschreiben die zwei Parameterdarstellungen zwei Bewegungsvorgänge, bei denen der Punkt  $X$  dasselbe Kurvenstück innerhalb verschiedener Zeitabschnitte mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten durchläuft.

## 2.3. Die Bogenlänge einer Raumkurve

Es sei  $c$  eine Raumkurve mit der zulässigen Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ . Der Parameter  $t$  kann sich innerhalb des Intervalls  $a \leq t \leq b$  verändern. Wir unterteilen das Intervall in  $n$  Teilintervalle, indem wir  $n - 1$  zusätzliche Punkte zwischen  $a$  und  $b$  in folgender Weise einschalten. Es sei  $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ . Diesen Parameterwerten entsprechen auf der Kurve  $c$  die Punkte  $A = X_0, X_1, X_2, \dots, X_{n-1}, X_n = B$ . Wir verbinden diese Punkte durch einen geradlinigen Streckenzug  $S_n$ . Dieser Streckenzug  $S_n$  wird sich der Kurve  $c$  um so besser annähern, je feiner das Intervall  $[a, b]$  unterteilt worden ist. Für die Länge  $l_i$  der Teilstrecke  $X_{i-1}X_i$  des Streckenzugs gilt

$$l_i = |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| = \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k(t_i) - x_k(t_{i-1}))^2}. \quad (2.9)$$

Damit erhält man für die Länge  $L(S_n)$  des gesamten Streckenzugs

$$L(S_n) = \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}(t_i) - \mathbf{x}(t_{i-1})| = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^3 (x_k(t_i) - x_k(t_{i-1}))^2}. \quad (2.10)$$

Wegen des ersten Mittelwertsatzes der Differentialrechnung (vgl. Bd. 2, Satz 6.3) können wir schreiben

$x_k(t_i) - x_k(t_{i-1}) = \dot{x}_k(\bar{t}_i^k) (t_i - t_{i-1})$ , wobei  $t_{i-1} < \bar{t}_i^k < t_i$  für  $k = 1, 2, 3$  und  $i = 1, 2, \dots, n$  gilt. Damit ergibt sich

$$L(S_n) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^3 (\dot{x}_k(\bar{t}_i^k))^2 (t_i - t_{i-1})^2} = \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^3 (\dot{x}_k(\bar{t}_i^k))^2} (t_i - t_{i-1}). \quad (2.11)$$

Lassen wir  $n$  gegen  $\infty$  streben, indem wir die Unterteilung des Intervalls  $[a, b]$  immer mehr verfeinern, so wird aus der Summe ein (Riemannsches) Integral (vgl. Bd. 2, 5. Aufl., S. 161; [6], S. 41–43; [9], Bd. 3, S. 98)

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} L(S_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{\sum_{k=1}^3 (\dot{x}_k(\bar{t}_i^k))^2} (t_i - t_{i-1}) \\ &= \int_{t_0}^{t_n} \sqrt{\sum_{k=1}^3 (\dot{x}_k(t))^2} dt. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Den Wert dieses Integrals bezeichnet man als die Bogenlänge  $s(A, B)$  des Kurvenstücks von  $A$  nach  $B$ :

$$s(A, B) = \int_{a=t_0}^{b=t_n} \sqrt{\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t) + \dot{x}_3^2(t)} dt. \quad (2.13)$$

Dafür kann man auch schreiben

$$s(A, B) = \int_a^b \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)} dt = \int_a^b |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt. \quad (2.14)$$

Ersetzen wir den festen Punkt  $B$  mit dem Parameterwert  $b$  durch einen auf  $c$  beweglichen Punkt  $X$  mit dem Parameterwert  $t$ , wobei  $t$  dem Intervall  $[a, b]$  angehören soll, so erhalten wir aus (2.14), wenn wir die Integrationsvariable in  $u$  umbenennen und beachten, daß  $t_0 = a$  gilt

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\mathbf{x}}(u)| \, du. \quad (2.15)$$

Die Funktion  $s(t)$  bezeichnet man als **Bogenlänge** der Raumkurve  $c$ . Sie hängt noch von dem willkürlich auf  $c$  gewählten Anfangspunkt  $X_0$  ab. Sehr oft benötigt man auch die Ableitung von  $s(t)$  nach  $t$ . Durch Differentiation von (2.15) nach der oberen Grenze  $t$  ergibt sich

$$\frac{ds}{dt} = \dot{s}(t) = |\dot{\mathbf{x}}(t)| = \frac{|d\mathbf{x}|}{dt}. \quad (2.16)$$

Hieraus folgt

$$ds = |d\mathbf{x}| = |\dot{\mathbf{x}}(t)| \, dt = \sqrt{\dot{\mathbf{x}}(t) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)} \, dt$$

bzw.

$$ds = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2 + (\dot{x}_3(t))^2} \, dt. \quad (2.17)$$

Der durch (2.17) gegebene Ausdruck für  $ds$  wird als **Bogenelement** der Raumkurve bezeichnet.

Deutet man  $t$  wieder als Zeit, so stellt  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  das Bewegungsgesetz dar, mit der sich die Spitze  $X$  des als Ortsvektor aufgefaßten Vektors  $\mathbf{x}(t)$  längs der Raumkurve bewegt. Der Vektor  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  ist der Geschwindigkeitsvektor dieser Bewegung. In der Tat ist wegen (2.16)  $|\dot{\mathbf{x}}(t)| = ds/dt$ . Die Größe  $ds/dt$  ist aber gleich der Geschwindigkeit, mit der sich  $X$  längs  $c$  zum Zeitpunkt  $t$  bewegt. Da die Richtung des Vektors  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  mit der Tangentenrichtung in  $X$  übereinstimmt, gibt der Vektor  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  die Bewegungsrichtung des Punktes  $X$  zum Zeitpunkt  $t$  an. Schließlich stimmt der Richtungssinn des Vektors  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  mit dem Richtungssinn der Bewegung des Punktes  $X$  überein. Das heißt, der Punkt  $X$  bewegt sich in Richtung der Pfeilspitze des Vektors  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ .

## 2.4. Das begleitende Dreiein einer Raumkurve

Es werde angenommen, daß die Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  der Raumkurve  $c$  zulässig und von der Klasse  $r \geq 2$  sei, d. h. mindestens zweimal stetig differenzierbar ist. Der Tangentenvektor

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \dot{x}_1(t) \mathbf{i} + \dot{x}_2(t) \mathbf{j} + \dot{x}_3(t) \mathbf{k} \quad (2.18)$$

hat im allgemeinen in jedem Punkt  $X$  der Kurve  $c$  eine vom Parameterwert  $t$  abhängige Länge. Mit Hilfe der Gleichung (2.16)  $ds/dt = |\dot{\mathbf{x}}(t)|$  kann man die Bogenlänge der Raumkurve  $c$  als neuen Parameter einführen und erhält

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} = \mathbf{x}'. \quad (2.19)$$



Dabei bedeutet der Strich jetzt und auch im folgenden stets die Ableitung nach der Bogenlänge.<sup>1)</sup> Man erkennt, daß der Vektor  $\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{x}'$  ein Einheitsvektor ist, denn es gilt

$$|\mathbf{x}'| = \left| \frac{d\mathbf{x}}{ds} \right| = \frac{|\dot{\mathbf{x}}(t)|}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} = 1. \quad (2.20)$$

Man setzt

$$\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{x}' = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} = \mathbf{t} \quad (2.21)$$

und bezeichnet  $\mathbf{t}$  als den (normierten) **Tangentenvektor** der Raumkurve  $c$ . Differenziert man  $\mathbf{x}$  nochmals nach  $s$ , so erhält man

$$\mathbf{x}'' = \frac{d^2\mathbf{x}}{ds^2} = \mathbf{t}' = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} \right) \frac{dt}{ds}. \quad (2.22)$$

Mit  $|\dot{\mathbf{x}}(t)| = \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}$  folgt hieraus

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{t}' = \frac{\ddot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})}{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})^2}. \quad (2.23)$$

Der Vektor  $\mathbf{t}'$  steht auf  $\mathbf{t}$  senkrecht, da  $\mathbf{t}$  Einheitsvektor ist (vgl. S. 14).

Wir setzen

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{t}'}{|\mathbf{t}'|}. \quad (2.24)$$

Der Vektor  $\mathbf{n}$  ist ebenfalls ein Einheitsvektor und steht senkrecht auf  $\mathbf{t}$ , weil er dieselbe Richtung wie  $\mathbf{t}'$  hat. Der Vektor  $\mathbf{n}$  heißt **Hauptnormalenvektor** der Raumkurve  $c$ . Wegen  $\mathbf{t}' = \dot{\mathbf{t}} \frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{t}} \left( \frac{1}{|\dot{\mathbf{x}}|} \right)$  hat  $\dot{\mathbf{t}}$  dieselbe Richtung und denselben Richtungssinn wie  $\mathbf{t}'$ . Daher gilt

$$\mathbf{n} = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{|\dot{\mathbf{t}}|}. \quad (2.24')$$

Differenziert man die Gleichung  $\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|}$  nach dem Parameter  $t$ , so findet man wegen  $|\dot{\mathbf{x}}| = \sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}$

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{\ddot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})}{(\sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}})^3}.$$

Hieraus und aus (2.24') folgt mit (1.5)

$$\mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}| |\dot{\mathbf{x}}|} = \frac{(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}})}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}| |\dot{\mathbf{x}}|} \times \dot{\mathbf{x}}. \quad (2.25)$$

Bildet man das Vektorprodukt  $\mathbf{t} \times \mathbf{n}$ , so erhält man einen dritten Vektor

$$\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}. \quad (2.26)$$

<sup>1)</sup> Mit Ausnahme der Abschnitte 3.2. bis 3.7.

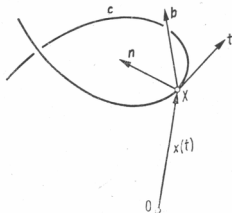


Bild 2.3. Das begleitende Dreiein einer Raumkurve

Der Vektor **b** wird als **Binormalenvektor** bezeichnet. Er steht senkrecht auf **t** und **n** und hat den Betrag 1.

Die drei Vektoren **t**, **n**, **b** denken wir uns als gerichtete Strecken vom Punkt **X** der Raumkurve mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}(t)$  abgetragen. Dann bilden die drei Vektoren **t**, **n**, **b** ein orthogonales gleichschenkliges Dreiein, das sich bei Bewegung des Punktes **X** längs der Raumkurve **c** mitbewegt. Deshalb heißt dieses Dreiein das **begleitende Dreiein** der Raumkurve. Wegen der Definition des Vektorproduktes stellt das begleitende Dreiein ein Rechtssystem dar. Das heißt, wenn man von der Spitze des Vektors **b** auf die Ebene der Vektoren **t** und **n** blickt und den Vektor **t** durch eine Vierteldrehung in den Vektor **n** überführt, so erscheint diese Drehung als eine Drehung im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn). Es gilt  $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{t}$  und  $\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$ . Setzt man in (2.26) für **n** den Ausdruck aus (2.25) ein und berücksichtigt den Entwicklungssatz (1.5), so erhält man

$$\mathbf{b} = \frac{\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|}. \quad (2.27)$$

## 2.5. Die Schmiegebene einer Raumkurve

Wir betrachten eine Raumkurve **c** mit der zulässigen Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  der Klasse  $r \geq 2$  und  $\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} \neq 0$ . Auf **c** sei ein Punkt **X** gegeben. Sind  $X_1, X_2$  zwei weitere Punkte der Kurve **c**, die in der Nachbarschaft von **X**, aber nicht mit **X** auf ein und derselben Geraden liegen, so bestimmen die drei Punkte **X**,  $X_1$ ,  $X_2$  eine Ebene  $\varepsilon_{12}(X)$ , der sie angehören. Bewegen sich  $X_1$  und  $X_2$  auf der Kurve **c** unabhängig voneinander gegen den Punkt **X**, so geht die Ebene  $\varepsilon_{12}(X)$  bei diesem Grenzprozeß in eine Ebene  $\sigma_x$  über, die man als **Schmiegeebene** der Kurve **c** im Punkt **X** bezeichnet. Da die Sekanten  $XX_1$  bzw.  $XX_2$  bei dem Grenzprozeß in die Tangente  $t_x$  der Kurve **c** im Punkt **X** übergehen, enthält  $\sigma_x$  die Tangente  $t_x$ . Die Kurve **c** berührt die Schmiegeebene  $\sigma_x$  im Punkt **X**.

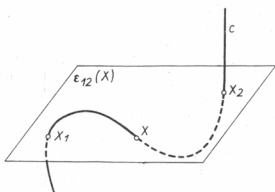


Bild 2.4. Ebene durch drei benachbarte Punkte einer Raumkurve

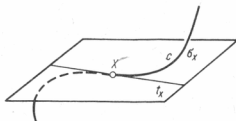


Bild 2.5. Die zu einem Punkt einer Raumkurve gehörige Schmiegenebene

Außerdem hat die Ebene  $\varepsilon_{12}(X)$  in jeder Lage mit der Kurve  $c$  mindestens die drei benachbarten Punkte  $X, X_1, X_2$  gemein und wird daher von  $c$  im allgemeinen in der Umgebung von  $X$  durchsetzt. Da die drei Punkte bei dem Grenzprozeß in den Punkt  $X$  zusammengedrückt sind, sagt man, daß die Kurve  $c$  mit ihrer Schmiegenebene  $\sigma_X$  mindestens drei infinitesimal benachbarte Punkte gemein hat. Geometrisch bedeutet das, daß die Kurve  $c$  im allgemeinen die Schmiegenebene  $\sigma_X$  im Punkt  $X$  nicht nur berührt, sondern auch noch durchsetzt.

Die Schmiegenebene  $\sigma_X$  ist diejenige Ebene, der sich die Kurve  $c$  in der Umgebung des Kurvenpunktes  $X$  am besten annähert. Das heißt, praktisch verläuft die Kurve  $c$  in unmittelbarer Umgebung des Punktes  $X$  in der Schmiegenebene  $\sigma_X$ .

Die Schmiegenebene  $\sigma_X$  einer Raumkurve  $c$  hängt natürlich von der Lage des Punktes  $X$  ab und ändert sich, wenn sich  $\mathbf{x}$  ändert. Eine Ausnahme machen hier lediglich die ebenen Kurven, die in jedem ihrer Punkte die gleiche Ebene – nämlich die Ebene, in der die jeweilige Kurve liegt – als Schmiegenebene besitzen.

Es seien  $\mathbf{x}(t)$ ,  $\mathbf{x}(t+h)$ ,  $\mathbf{x}(t+k)$  die Ortsvektoren der drei Kurvenpunkte  $X, X_1, X_2$ . Die Vektoren  $\mathbf{a} = (\mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t))/h$ ,  $\mathbf{b} = (\mathbf{x}(t+k) - \mathbf{x}(t))/k$  und  $\mathbf{c} = 2 \frac{\mathbf{b} - \mathbf{a}}{k - h}$  sind drei Vektoren der Ebene  $\varepsilon_{12}(X)$ . Entwickelt man diese Vektorfunktionen nach Taylor (vgl. Bd. 2, Satz 6.8), so erhält man (vgl. [6], S. 48–49)

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{x}}(t) h + \mathbf{o}(h)^1 \\ \mathbf{b} &= \dot{\mathbf{x}}(t) + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{x}}(t) k + \mathbf{o}(k) \\ \mathbf{c} &= \ddot{\mathbf{x}}(t) + \frac{2}{k - h} (\mathbf{o}(k) - \mathbf{o}(h)). \end{aligned} \quad (2.28)$$

<sup>1)</sup> Zur Bedeutung der Vektoren  $\mathbf{o}(h)$ ,  $\mathbf{o}(k)$  vgl. Abschnitt 2.10.

Für  $h \rightarrow 0$ ,  $k \rightarrow 0$  gehen die Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  in Vektoren der Schmiegenebene  $\sigma_X$  über<sup>1)</sup>. Die zwei Vektoren  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  werden zu  $\dot{\mathbf{x}}(t)$ , der Vektor  $\mathbf{c}$  zu  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ . Die Vektoren  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  und  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  spannen die Schmiegenebene  $\sigma_X$  auf, wenn man sie als gerichtete Strecken an den Punkt  $X$  der Raumkurve  $c$  anträgt.<sup>2)</sup> Bezeichnet man mit  $\mathbf{y}$  den Ortsvektor eines beliebigen Punktes  $Y$  von  $\sigma_X$ , so lautet die Gleichung von  $\sigma_X$

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t), \ddot{\mathbf{x}}(t)) = 0. \quad (2.29)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite von Gleichung (2.29) bedeutet das gemischte Produkt (Spat) der in der Klammer stehenden drei Vektoren  $\mathbf{y} - \mathbf{x}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  und  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$ . Da sich der Hauptnormalenvektor  $\mathbf{n}$  wegen (2.25) in der Gestalt

$$\mathbf{n} = \frac{\ddot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) - \dot{\mathbf{x}}(\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}| |\dot{\mathbf{x}}|}$$

schreiben läßt, liegen  $\mathbf{n}$  und damit auch die Hauptnormale  $n_X$  in der von  $\dot{\mathbf{x}}$  und  $\ddot{\mathbf{x}}$  bestimmten Schmiegenebene  $\sigma_X$ . Die Schmiegenebene  $\sigma_X$  eines Punktes  $X$  einer Raumkurve  $c$  wird durch die Vektoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{n}$  ihres begleitenden Dreieins in  $X$  aufgespannt. Die von den Vektoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{b}$  gebildete Ebene heißt **rektifizierende Ebene** oder **Streckebene**, während die von  $\mathbf{n}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannte Ebene **Normalebene**<sup>3)</sup> der Raumkurve  $c$  genannt wird.

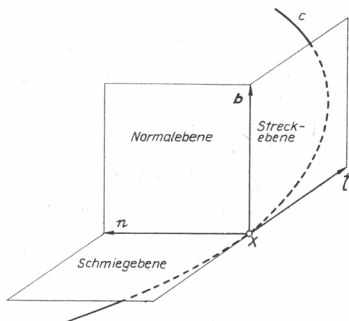


Bild 2.6. Normalebene, Schmiegenebene und Streckebene

Deutet man den Parameter  $t$  als Zeit, so stellt die vektorielle Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(t)$  das Bewegungsgesetz dar, unter dem sich der Punkt  $X$  entlang der Raumkurve  $c$  bewegt. Die Vektoren  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  und  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  stellen den Geschwindigkeitsvektor und den Beschleunigungsvektor dieser Bewegung dar. Berücksichtigt man dies, so kann man sagen, daß die Schmiegenebene der Raumkurve  $c$  für den Punkt, an dem sich  $X$  zur Zeit  $t$  befindet, durch  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  und  $\ddot{\mathbf{x}}(t)$  aufgespannt wird.

<sup>1)</sup> Allerdings muß  $h \neq k$  sein, und  $\frac{k}{h}$  darf nicht gegen 1 gehen, wenn  $h$  und  $k$  gegen null streben.

<sup>2)</sup> Dabei wird vorausgesetzt, daß  $\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}$  ist.

<sup>3)</sup> Jede Gerade in der Normalebene, die die Kurve  $c$  trifft, bezeichnet man als Normale der Raumkurve  $c$ .

## 2.6. Die Krümmung und Windung einer Raumkurve

Durch die drei Punkte  $X, X_1, X_2$  ist in der Ebene  $\varepsilon_{12}(X)$  ein Kreis  $k_{12}(X)$  bestimmt. Rücken  $X_1$  und  $X_2$  gegen  $X$ , so geht der Kreis  $k_{12}(X)$  in einen Kreis  $k(X)$  in der Schmiegeebene  $\sigma_X$  mit dem Mittelpunkt  $M(X)$  und dem Radius  $\varrho(X) = \overline{XM}(X)$  über. Dieser Kreis  $k(X)$  ist der zum Punkt  $X$  gehörige **Krümmungskreis**.  $M(X)$  ist der **Krümmungsmittelpunkt** und  $\varrho(X)$  der **Krümmungsradius**.

Der Kreis  $k_{12}(X)$  enthält die Sekante  $XX_1$ . Diese geht bei dem Grenzprozeß in die Kurventangente  $t_X$  und in die Tangente an den Krümmungskreis im Punkt  $X$  über. Daher berührt der Krümmungskreis  $k(X)$  die Tangente  $t_X$  (bzw. die Kurve  $c$  im Punkt  $X$ ) und sein Mittelpunkt  $M(X)$  liegt auf der Hauptnormale  $n_X$  der Kurve  $c$  in  $X$ .

Es seien  $X, \bar{X}$  zwei benachbarte Punkte der Kurve  $c$  und  $\mathbf{t}, \bar{\mathbf{t}} = \mathbf{t} + \Delta\mathbf{t}$  die zugehörigen Tangentenvektoren. Bezeichnet man den Winkel zwischen  $\mathbf{t}$  und  $\bar{\mathbf{t}}$  mit  $\Delta\alpha$  und die Bogenlänge des durch  $X$  und  $\bar{X}$  begrenzten Kurvenstücks mit  $\Delta s$ , dann läßt sich die **Krümmung** oder Flexion  $\varkappa$  der Kurve  $c$  im Punkt  $X$  wie folgt definieren:

$$\varkappa(X) = \lim_{\bar{X} \rightarrow X} \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (2.30)$$

Der Krümmungskreis  $k(X)$  unterscheidet sich von der Kurve  $c$  in der unmittelbaren Umgebung des Punktes  $X$  sehr wenig, denn  $k(X)$  hat mit  $c$  *drei infinitesimal benachbarte Punkte* gemein.

Betrachtet man zwei infinitesimal benachbarte Punkte  $X, \bar{X}$  und ihre Tangentenvektoren  $\mathbf{t}, \mathbf{t} + d\mathbf{t}$ , so gilt  $|d\mathbf{t}| = d\alpha$ , wobei  $d\alpha$  den Winkel bezeichnet, den diese Vektoren miteinander bilden. Dann ist

$$\varkappa = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{|d\mathbf{t}|}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{t}}{ds} \right| = |\mathbf{t}'|. \quad (2.31)$$

Damit ist die Krümmung einer Raumkurve in keinem ihrer Punkte negativ. Mit Hilfe von Gleichung (2.23) erhält man für die Krümmung

$$\varkappa = \frac{\sqrt{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})(\ddot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}) - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})^2}}{(\sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}})^3} = \frac{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|}{|\dot{\mathbf{x}}|^3} = \frac{1}{\varrho}. \quad (2.32)$$

Die Größe  $\varrho = 1/\varkappa$  ist der **Krümmungsradius**, und durch  $\mathbf{m} = \mathbf{x}(t) + \varrho\mathbf{n}$  ist der Ortsvektor des **Krümmungsmittelpunktes**  $M(X)$  gegeben. Der Kreis mit dem Mittelpunkt  $M(X)$  und dem Radius  $\varrho$ , der in der Schmiegeebene  $\sigma_X$  liegt, berührt die Raumkurve im Punkt  $X$  und ist mit dem Krümmungskreis  $k(X)$  identisch.

Um dies einzusehen, betrachtet man den Kreis  $k_{12}(X)$  durch die drei Punkte  $X, X_1, X_2$ . Sind  $\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t_1), \mathbf{x}(t_2)$  ihre Ortsvektoren,  $\mathbf{m}_{12}$  der des Kreismittelpunktes und  $\varrho_{12}$  der Radius von  $k_{12}$ , so hat man

$$(\overline{XM}_{12})^2 = (\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}_{12})^2 = (\varrho_{12})^2 = (\overline{X_1M}_{12})^2 = (\mathbf{x}(t_1) - \mathbf{m}_{12})^2, \quad i = 1, 2.$$

Die Funktion  $F_{12}(u) = (\mathbf{x}(u) - \mathbf{m}_{12})^2 - (\varrho_{12})^2$  hat für  $u = t, t_1, t_2$  drei Nullstellen. Nimmt man an, daß der Krümmungskreis  $k(X)$  existiert, so geht mit  $t_1 \rightarrow t, t_2 \rightarrow t$  der Vektor  $\mathbf{m}_{12}$  in  $\mathbf{m}$ , den Ortsvektor des Krümmungsmittelpunktes,  $\varrho_{12}$  in  $\varrho$ ,  $F_{12}(u)$  in  $F(u) = (\mathbf{x}(u) - \mathbf{m})^2 - \varrho^2$  und  $k_{12}(X)$

in  $k(X)$  über. Die Funktion  $F(u)$  hat bei  $u = t$  eine dreifache Nullstelle. Daher ist  $F(t) = F'(t) = F''(t) = 0$ . Hieraus folgt  $(\mathbf{x}(t) - \mathbf{m})^2 - \varrho^2 = 0$ ,  $F'(t) = 2(\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t) = 0$  und  $F''(t) = 2(\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}) \cdot \ddot{\mathbf{x}} + 2\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$ . Wegen  $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{x}}/|\dot{\mathbf{x}}|$  steht  $\mathbf{x} - \mathbf{m}$  senkrecht auf  $\mathbf{t}$ . Daher liegt  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}$  in der Normalebene. Andererseits liegt der Kreis  $k(X)$  und damit auch  $X$  und  $M(X)$  in der Schmieg Ebene  $\sigma_X$ , daher  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}$  auf der Schnittgerade von Normalebene und Schmiegeebene, d. h. auf der Hauptnormale. Mithin ist  $\mathbf{x}(t) - \mathbf{m} = \alpha \mathbf{n}$ . Setzt man dies in die Gleichung für  $F''(t)$  ein, so ergibt sich  $\alpha \mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{x}} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 0$ , und wegen (2.25), (1.7) und (2.32) folgt

$$\begin{aligned}\alpha &= -\frac{\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}}{\mathbf{n} \cdot \ddot{\mathbf{x}}} = \frac{-|\dot{\mathbf{x}}|^2 |\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|}{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})(\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}) - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})^2} = \frac{-|\dot{\mathbf{x}}|^3 |\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|^2} \\ &= -\frac{|\dot{\mathbf{x}}|^3}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|} = -\frac{1}{\varkappa} = -\varrho.\end{aligned}$$

Daher findet man  $\alpha = -\varrho$  und  $\mathbf{m} = \mathbf{x}(t) + \varrho \mathbf{n}$  sowie

$$\overline{XM} = |\mathbf{x}(t) - \mathbf{m}| = |\varrho \mathbf{n}| = \varrho |\mathbf{n}| = \varrho$$

wie behauptet (vgl. [14], S. 67).

Faßt man in  $\mathbf{x}(t)$  den Parameter  $t$  als Zeit auf, so sind  $\dot{\mathbf{x}}$  und  $\ddot{\mathbf{x}}$  der *Geschwindigkeits*- und der *Beschleunigungsvektor* der Bewegung des Punktes  $X$  längs  $c$ . Es soll  $\ddot{\mathbf{x}}$  in Komponenten nach den Vektoren  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{n}$  zerlegt werden. Das ergibt

$$\ddot{\mathbf{x}} = b_t \mathbf{t} + b_n \mathbf{n} \quad (2.33)$$

mit  $b_t = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{t}$ ,  $b_n = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n}$ . Man findet

$$b_t = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|} = \frac{\ddot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}{\sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}}} = (\sqrt{\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}})' = |\dot{\mathbf{x}}|' = \dot{v} = \frac{dv}{dt}.$$

Dabei wurde  $|\dot{\mathbf{x}}| = v$  gesetzt, wobei  $v$  die Bahngeschwindigkeit des Punktes  $X$  ist. Durch  $b_t = dv/dt$  ist die *Tangentialbeschleunigung*<sup>1)</sup> gegeben. Aus (2.25) folgt

$$b_n = \ddot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{n} = \frac{(\ddot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}}) - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})^2}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}| |\dot{\mathbf{x}}|} = \frac{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|^2}{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}| |\dot{\mathbf{x}}|} = \frac{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|}{|\dot{\mathbf{x}}|}.$$

Berücksichtigt man noch (2.31) und (2.32), so erhält man wegen  $\varkappa = 1/\varrho = |\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|/|\dot{\mathbf{x}}|^3$

$$b_n = \frac{|\dot{\mathbf{x}} \times \ddot{\mathbf{x}}|}{|\dot{\mathbf{x}}|^3} |\dot{\mathbf{x}}|^2 = \frac{v^2}{\varrho}. \quad (2.34)$$

Die Beschleunigungskomponente  $b_n$  stellt die *Normalbeschleunigung*<sup>1)</sup> des Punktes  $X$  dar. Sie wird auch gelegentlich als *Zentripetalbeschleunigung* bezeichnet.

Sind  $\mathbf{b}$  und  $\overline{\mathbf{b}} = \mathbf{b} + \Delta \mathbf{b}$  die Binormalenvektoren der benachbarten Punkte  $X$  und  $\overline{X}$  der Raumkurve  $c$  und ist  $\Delta \beta$  der mit einem Vorzeichen behaftete Winkel zwischen den Vektoren  $\mathbf{b}$  und  $\overline{\mathbf{b}}$ , so versteht man unter der **Windung** oder **Torsion** der Raumkurve  $c$  im Punkt  $X$  die Größe

$$\tau = \lim_{\overline{X} \rightarrow X} \frac{\Delta \beta}{\Delta s} = \frac{d\beta}{ds}. \quad (2.35)$$

<sup>1)</sup> In der Technik werden Tangential- und Normalbeschleunigung mit  $a_t$  und  $a_n$  bezeichnet.

Das Vorzeichen von  $\tau$  ist dabei positiv, wenn sich bei der Bewegung des Dreibeins  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  von  $X$  nach  $\bar{X}$  die Binormale  $\mathbf{b}$  wie bei einer Rechtsschraubung bewegt. Entsprechend diesem Sachverhalt ist der Winkel  $\Delta\beta$  positiv, wenn der Vektor  $\mathbf{b}$  bei der Bewegung des Dreibeins von  $X$  nach  $\bar{X}$ , blickt man in Richtung des den Vektor  $\mathbf{t}$

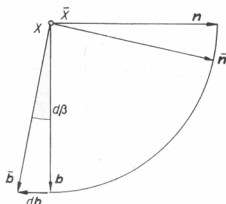


Bild 2.7. Zur Definition der Torsion

darstellenden Pfeils, sich im Uhrzeigersinn dreht. Andernfalls ist der Winkel  $\Delta\beta$  negativ. Daher gilt  $d\beta = \pm|d\mathbf{b}|$ . Aus dem Bild 2.7 entnimmt man die Beziehung

$$d\mathbf{b} = -\mathbf{n} d\beta. \quad (2.36)$$

Daraus folgt  $\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{d\beta}{ds} \mathbf{n}$  bzw.

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}. \quad (2.37)$$

Hieraus ergibt sich

$$\tau = -(\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n}). \quad (2.38)$$

Wegen  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$  erhält man  $\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' = 0$ . Daher ergibt sich

$$\tau = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}') = (\mathbf{t} \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{n}'. \quad (2.39)$$

Setzt man  $\mathbf{t} = \mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}''}{(\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}'')^{1/2}}$  und  $\mathbf{n}' = \frac{\mathbf{x}'''(\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}'') - \mathbf{x}''(\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}''')}{\sqrt{(\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}'')^3}}$ , so

findet man

$$\tau = \frac{(\mathbf{x}', \mathbf{x}'', \mathbf{x}''')}{(\mathbf{x}'' \cdot \mathbf{x}'')}. \quad (2.40)$$

Bezieht man die Raumkurve auf den beliebigen Parameter  $t$ , so erhält man nach kurzer Rechnung

$$\tau = \frac{(\dot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}}, \ddot{\mathbf{x}})}{(\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})(\ddot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}}) - (\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}})^2}. \quad (2.40')$$

- \* *Aufgabe 2.1:* Man bestimme die Bogenlänge und das begleitende Dreibein der durch

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2} t^2 \mathbf{i} + \ln |t| \mathbf{j} + t \sqrt{2} \mathbf{k}$$

gegebenen Raumkurve für das Intervall  $1 \leq t \leq 4$ .

- \* *Aufgabe 2.2:* Es ist die Krümmung und die Windung der Raumkurve mit der Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(t) = t \mathbf{i} + t^2 \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$  zu berechnen.

## 2.7. Die Frenetschen Formeln

Die Ableitungsvektoren  $\mathbf{t}'$ ,  $\mathbf{n}'$  und  $\mathbf{b}'$  lassen sich durch die drei Vektoren  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  ausdrücken. Wegen  $\kappa = |\mathbf{t}'|$  und  $\mathbf{n} = \mathbf{t}'/|\mathbf{t}'|$  ergibt sich

$$\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}.$$

Diese Gleichung wird als *erste Frenetsche Formel* bezeichnet. Für den Ableitungsvektor  $\mathbf{n}'$  macht man den Ansatz

$$\mathbf{n}' = c_1 \mathbf{t} + c_2 \mathbf{n} + c_3 \mathbf{b}. \quad (2.41)$$

Multipliziert man die Gleichung (2.41) skalar mit  $\mathbf{t}$ , so erhält man  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n}' = c_1$ . Aus  $\mathbf{t} \cdot \mathbf{n} = 0$  findet man durch Differentiation  $\mathbf{t}' \cdot \mathbf{n} + \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}' = 0$ . Hieraus ergibt sich

$$c_1 = \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}' = -\mathbf{t}' \cdot \mathbf{n} = -\kappa \mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -\kappa. \quad (2.42)$$

Die Multiplikation von (2.41) mit  $\mathbf{n}$  führt zu  $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} = c_2$ . Aus  $\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n} = 0$  folgt

$$c_2 = 0. \quad (2.43)$$

Schließlich führt die Multiplikation von (2.41) mit  $\mathbf{b}$  zu  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' = c_3$ , woraus wegen  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n} = 0$  wieder  $\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' + \mathbf{b}' \cdot \mathbf{n} = 0$  und damit

$$c_3 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' = -\mathbf{b}' \cdot \mathbf{n} \quad (2.44)$$

folgt. Beachtet man die Gleichung (2.38), so findet man  $c_3 = \tau$ . Damit lautet die *zweite Frenetsche Formel*

$$\mathbf{n}' = -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}.$$

Die Gleichung (2.37)

$$\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$$

bezeichnet man als *dritte Frenetsche Formel*. Schreibt man alle drei Gleichungen untereinander, so erhält man das folgende System

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (2.45)$$

Diese drei **Frenetschen Formeln** oder auch Frenetschen Ableitungsgleichungen stellen ein System von drei linearen Differentialgleichungen für die vektoriellen Funktionen  $\mathbf{t}(s)$ ,  $\mathbf{n}(s)$ ,  $\mathbf{b}(s)$  dar. Zerlegt man die Vektoren in Komponenten  $\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3)$ ,



$\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3)$ ,  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , so erhält man aus dem vektoriellen Differentialgleichungssystem (2.45) drei Systeme für die skalaren Komponenten  $t_i, n_i, b_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) der Vektoren  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ .

$$\begin{aligned} t_i' &= \kappa n_i, \\ n_i' &= -\kappa t_i + \tau b_i, \quad (i = 1, 2, 3) \\ b_i' &= -\tau n_i. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Sind die Größen  $\kappa$  und  $\tau$  stetige Funktionen der Bogenlänge  $s$  mit  $\kappa > 0$  im Intervall  $0 \leq s \leq a$  und hat man für  $s = 0$  die Anfangswerte  $t_i^0, n_i^0, b_i^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) gegeben, so daß die Bedingungen

$$\sum_{i=1}^3 (t_i^0)^2 = \sum_{i=1}^3 (n_i^0)^2 = \sum_{i=1}^3 (b_i^0)^2 = 1$$

und

$$\sum_{i=1}^3 t_i^0 n_i^0 = \sum_{i=1}^3 t_i^0 b_i^0 = \sum_{i=1}^3 n_i^0 b_i^0 = 0$$

gelten, dann gibt es für jedes  $i = 1, 2, 3$  drei Funktionen  $t_i(s), n_i(s), b_i(s)$ , die das entsprechende System (2.46) erfüllen.<sup>1)</sup> Außerdem gelten die Gleichungen

$$\sum_{i=1}^3 t_i^2 = \sum_{i=1}^3 n_i^2 = \sum_{i=1}^3 b_i^2 = 1$$

und

$$\sum_{i=1}^3 t_i n_i = \sum_{i=1}^3 t_i b_i = \sum_{i=1}^3 n_i b_i = 0,$$

und es ist

$$t_i(0) = t_i^0, \quad n_i(0) = n_i^0, \quad b_i(0) = b_i^0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

Durch Integration der Gleichungen  $x_i' = t_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) findet man schließlich drei Funktionen  $x_i(s)$ , von denen jede noch eine willkürliche Integrationskonstante enthält. Gibt man noch drei Zahlen  $x_i^0$  ( $i = 1, 2, 3$ ) vor und fordert, daß die Bedingungen  $x_i(0) = x_i^0$  erfüllt sind, so ist durch den Vektor  $\mathbf{x}(s) = x_1(s)\mathbf{i} + x_2(s)\mathbf{j} + x_3(s)\mathbf{k}$  die Parameterdarstellung einer Raumkurve  $c$  gegeben, die die Krümmung  $\kappa(s)$  und die Torsion  $\tau(s)$  besitzt und deren begleitendes Dreibein  $\mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)$  das Gleichungssystem (2.45) erfüllt. Für  $s = 0$  gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(0) &= t_1^0 \mathbf{i} + t_2^0 \mathbf{j} + t_3^0 \mathbf{k}, \quad \mathbf{n}(0) = n_1^0 \mathbf{i} + n_2^0 \mathbf{j} + n_3^0 \mathbf{k}, \\ \mathbf{b}(0) &= b_1^0 \mathbf{i} + b_2^0 \mathbf{j} + b_3^0 \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis bedeutet, daß eine Raumkurve, was ihre geometrische Struktur anbetrifft, bis auf Bewegungen im Raum eindeutig durch ihre Krümmung  $\kappa(s)$  und ihre Torsion  $\tau(s)$  bestimmt ist.

<sup>1)</sup> Wegen der Existenz einer Lösung für die Systeme (2.46) vgl. [6], S. 69–72.

\* *Aufgabe 2.3:* Man bestimme die Raumkurve mit der Krümmung  $\kappa(s) = \frac{1}{2+s^2}$  und der Torsion  $\tau(s) = -\frac{1}{2+s^2}$ , die die Anfangsbedingungen

$$\mathbf{t}(0) = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), \quad \mathbf{n}(0) = (0, 0, 1), \quad \mathbf{b}(0) = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0), \\ \mathbf{x}(0) = (0, 0, 1)$$

erfüllt.

## 2.8. Der Darbouxsche Vektor

Die Frenetschen Formeln können auch noch in anderer Form geschrieben werden. Dazu führt man einen Vektor  $\mathbf{d} = d_1\mathbf{t} + d_2\mathbf{n} + d_3\mathbf{b}$  mit zunächst unbestimmten Koeffizienten  $d_1, d_2, d_3$  ein. Die unbekannten Koordinaten  $d_i$  ergeben sich aus der Forderung, daß die Frenetschen Formeln die Gestalt

$$\begin{aligned} \mathbf{t}' &= \mathbf{d} \times \mathbf{t}, \\ \mathbf{n}' &= \mathbf{d} \times \mathbf{n}, \\ \mathbf{b}' &= \mathbf{d} \times \mathbf{b} \end{aligned} \tag{2.47}$$

erhalten sollen. Da  $\mathbf{t}, \mathbf{n}, \mathbf{b}$  ein orthogonales gleichschenkliges Dreiein bilden, können wir die Vektorprodukte mit Hilfe der Determinantenschreibweise (siehe S. 10) ermitteln:

$$\mathbf{t}' = \mathbf{d} \times \mathbf{t} = \begin{vmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ d_1 & d_2 & d_3 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = d_3\mathbf{n} - d_2\mathbf{b} = \kappa\mathbf{n}.$$

Hieraus folgt sofort  $d_2 = 0, d_3 = \kappa$ . Ebenso ergibt sich aus der zweiten Gleichung von (2.47)

$$\mathbf{n}' = \mathbf{d} \times \mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ d_1 & 0 & \kappa \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\kappa\mathbf{t} + d_1\mathbf{b} = -\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}.$$

Wir erhalten  $d_1 = \tau$ . Setzen wir die erhaltenen Werte in den Ansatz für den Vektor  $\mathbf{d}$  ein, so ergibt sich, daß auch die dritte Frenetsche Formel in der gewünschten Art geschrieben werden kann:

$$\mathbf{b}' = \mathbf{d} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{t} & \mathbf{n} & \mathbf{b} \\ \tau & 0 & \kappa \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\tau\mathbf{n}.$$

Das stimmt in der Tat mit der dritten Frenetschen Formel überein. Man nennt den Vektor

$$\mathbf{d} = \tau\mathbf{t} + \kappa\mathbf{b}$$

den **Darbouxschen Vektor** zu Ehren des französischen Mathematikers G. Darboux.

Die Frenetschen Formeln können mit Hilfe des Darbouxschen Vektors kinematisch gedeutet werden.

Dreht sich ein starrer Körper um eine Achse mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  und wählen wir auf dieser Drehachse den Ursprung  $O$  eines Koordinatensystems, so können wir zunächst den Vektor  $\mathbf{u}$  der Winkelgeschwindigkeit einführen. Das ist ein Vektor, dessen Betrag gleich der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  ist, dessen Richtung mit der Richtung der Drehachse zusammenfällt und dessen Richtungssinn so gewählt wird, daß die Drehung mathematisch positiv (im Gegenuhrzeigersinn) erscheint, wenn man entlang der Drehachse entgegen dem Richtungssinn von  $\mathbf{u}$  auf den sich drehenden Körper blickt. Das Koordinatensystem drehe sich mit dem starren Körper mit. Ist  $P$  ein beliebiger Punkt des Körpers,  $\mathbf{r} = \overrightarrow{OP}$  sein Ortsvektor, so beschreibt  $P$  bei der Drehung einen Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Drehachse steht. Für den Radius  $\varrho$  dieses Kreises ergibt sich  $\varrho = |\mathbf{r}| \sin(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ . Die Bahngeschwindigkeit  $\mathbf{v}$  von  $P$  ist dann  $\mathbf{v} = \varrho \omega$ . Führt man den Vektor  $\mathbf{v}$  der Bahngeschwindigkeit ein, so gilt  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ . Der Vektor  $\dot{\mathbf{r}}$  ist ein Tangentenvektor des Kreises. Er liegt in der Kreisebene und steht auf  $\mathbf{r}$  und auf dem Berührungsradius  $\varrho$  von  $P$  senkrecht. Daher steht  $\mathbf{v}$  auch auf der von  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{u}$  gebildeten Ebene senkrecht. Es gilt daher

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}. \quad (2.48)$$

*Beweis.* Wegen  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$  steht  $\mathbf{v}$  auf  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{u}$  senkrecht, hat also die verlangte Richtung.  $|\mathbf{v}| = v = |\mathbf{u}| |\mathbf{r}| \sin(\mathbf{r}, \mathbf{u})$ . Nun ist  $r \sin(\mathbf{r}, \mathbf{u}) = \varrho$ . Folglich ist  $|\mathbf{v}| = v = \varrho |\mathbf{u}| = \varrho \omega$ . Damit hat  $\mathbf{v}$  auch den richtigen Betrag. Wegen  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{r}$  zeigt der  $\mathbf{v}$  entsprechende Pfeil in die Bewegungsrichtung von  $P$ . Folglich hat  $\mathbf{v}$  auch den gewünschten Richtungssinn.

Faßt man das begleitende Dreibein einer Raumkurve als einen starren Körper auf, wobei der Ursprung  $X$  sich entlang der Raumkurve mit der konstanten Bahngeschwindigkeit  $ds/dt = 1$  bewegt, so folgt aus den Frenetschen Formeln (2.47) wegen  $\mathbf{t}' = \dot{\mathbf{t}}$ ,  $\mathbf{n}' = \dot{\mathbf{n}}$ ,  $\mathbf{b}' = \dot{\mathbf{b}}$ , daß sich das System  $\mathbf{t}$ ,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}$  in jedem Moment mit der Winkelgeschwindigkeit  $d = |\dot{\mathbf{d}}|$  um die durch den Punkt  $X$  und den Vektor  $\mathbf{d}$  bestimmte Achse dreht. Der Darbouxsche Vektor liegt, wenn man sich ihn durch eine gerichtete Strecke mit dem Punkt  $X$  der Raumkurve als Anfangspunkt veranschaulicht denkt, in der von  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{b}$  bestimmten Ebene, die auch als **rektifizierende Ebene** bezeichnet wird. Bewegt sich das begleitende Dreibein entlang der Raumkurve  $c$ , so hüllt die rektifizierende Ebene eine gekrümmte Fläche ein. Diese Hüllfläche wird als **rektifizierende Fläche** bezeichnet. Die rektifizierende Fläche ist eine *Regelfläche*, d. h. eine Fläche, die Träger einer Geradenschar ist. Die Geraden einer solchen Schar nennt man die Erzeugenden der Regelfläche (vgl. S. 108). Im Fall der rektifizierenden Fläche einer Raumkurve ergibt sich für jede Lage des begleitenden Dreibeins eine Erzeugende der Fläche als eine Gerade, die durch den Ursprung  $X$  des begleitenden Dreibeins parallel zum Darbouxsschen Vektor  $\mathbf{d}$  verläuft. Die Raumkurve  $c$  liegt somit ganz auf der rektifizierenden Fläche. Es läßt sich nun zeigen, daß die rektifizierende Fläche einer Raumkurve stets in eine Ebene abgewickelt werden kann. Bei dieser Verebnung der rektifizierenden Fläche geht die auf ihr liegende Raumkurve in eine Gerade über. Diese Tatsache erklärt den Namen rektifizierende Fläche (vgl. [8], S. 85-86).

Der Betrag des Darbouxsschen Vektors hat auch noch eine andere Bedeutung. Sind  $X$  und  $\bar{X}$  zwei benachbarte Punkte einer Raumkurve,  $\mathbf{n}$  und  $\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{n} + \Delta \mathbf{n}$  die zugehörigen Hauptnormalenvektoren, ist  $\Delta \gamma$  der Winkel zwischen  $\mathbf{n}$  und  $\bar{\mathbf{n}}$  und ist  $\Delta s$  die Länge des Bogens des  $X$  und  $\bar{X}$  begrenzten Kurvenstücks, so bezeichnet man mit

$$\lambda = \lim_{\bar{X} \rightarrow X} \frac{\Delta \gamma}{\Delta s} = \frac{d\gamma}{ds} \quad (2.49)$$

die **Totalkrümmung** der Raumkurve. Wegen  $d\mathbf{n} = (-\kappa \mathbf{t} + \tau \mathbf{b}) ds$  und  $|\mathbf{n}| = 1$  (vgl. S. 14) folgt  $d\gamma = |d\mathbf{n}| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} ds$  und man erhält

$$\lambda = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2}. \quad (2.50)$$

Es gilt der

**S.2.1. Satz 2.1 (Lancret):** Die Totalkrümmung  $\lambda$  einer Raumkurve ist bekannt, wenn die Krümmung  $\kappa$  und die Windung  $\tau$  der Kurve bekannt sind, und es gilt  $\lambda^2 = \kappa^2 + \tau^2$ .

Bildet man nun den Betrag von  $\mathbf{d}$ , so erhält man  $|\mathbf{d}| = \sqrt{\kappa^2 + \tau^2} = \lambda$ . Der Betrag des Darbouxschen Vektors ist gleich der Totalkrümmung.

## 2.9. Die gewöhnliche Schraubenlinie als Beispiel einer Raumkurve

Wir betrachten einen Punkt  $A$  mit den Koordinaten  $(a, 0, 0)$  im orthogonalen Koordinatensystem  $O(x_1, x_2, x_3)$ . Dieser Punkt soll sich um die  $x_3$ -Achse mit konstanter Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  drehen und gleichzeitig parallel zur  $x_3$ -Achse eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  ausführen. Die Überlagerung beider Bewegungen bezeichnet man als *Schraubung* oder *Verschraubung* des Punktes  $A$ . Der Punkt  $A$  beschreibt, wenn er verschraubt wird, eine Raumkurve, die als **Schraubenlinie** bezeichnet wird. Die  $x_3$ -Achse nennt man *Schraubachse* und das Verhältnis der Geschwindigkeit  $v$  zur Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  wird *Schraubparameter* oder *reduzierte Ganghöhe* genannt und mit  $p$  bezeichnet (vgl. [7]; [9], Bd. 2, Nr. 141). Bei  $p > 0$  ist die Schraubenlinie rechtsgewunden (Rechtsschraubung), bei  $p < 0$  linksgewunden (Linksschraubung):

$$p = v/\omega. \quad (2.51)$$

Den Höhenunterschied, den der Punkt  $A$  bei einer vollen Umdrehung durchläuft, bezeichnet man als *Ganghöhe*  $h$ . Mithin ergibt sich aus (2.51), wenn  $T$  die Zeit für den Ablauf einer vollen Umdrehung darstellt,

$$p = \frac{v}{\omega} = \frac{vT}{2\pi} = \frac{h}{2\pi}. \quad (2.52)$$

Die Parameterdarstellung einer Schraubenlinie mit der Schraubachse  $x_3$  und dem Schraubparameter  $p$  lautet:

$$\mathbf{x}(t) = a \cos t \mathbf{i} + a \sin t \mathbf{j} + pt \mathbf{k}. \quad (2.53)$$

Dabei ist  $t$  der Winkel, den die Gerade  $OX'$  mit der  $x_1$ -Achse bildet, wenn  $X'$  die Orthogonalprojektion des Punktes  $X$  in die  $x_1, x_2$ -Ebene darstellt.<sup>1)</sup> Projiziert man die Schraubenlinie orthogonal in die  $x_1, x_2$ -Ebene, so erhält man  $x_1 = a \cos t$ ,  $x_2 = a \sin t$ ,  $x_3 = 0$ . Dies stellt einen Kreis vom Radius  $a$  um den Ursprung  $O$  dar. Daraus folgt, daß die Schraubenlinie auf einem geraden Kreiszylinder liegt, der die  $x_3$ -Achse als Drehachse besitzt und bei dem der Radius gleich  $a$  ist. Dieser gerade Kreiszylinder heißt Schraubzylinder. Für die Bogenlänge der Schraubenlinie erhält man wegen  $\dot{x}_1 = -a \sin t$ ,  $\dot{x}_2 = a \cos t$ ,  $\dot{x}_3 = p$

$$ds = |\dot{\mathbf{x}}(t)| dt = \sqrt{a^2 + p^2} dt.$$

Durch Integration folgt

$$s(t) = \sqrt{a^2 + p^2} t,$$

wenn  $s(0) = 0$  gesetzt wird. Für die Länge eines vollen Ganges der Schraubenlinie muß  $t$  von 0 bis  $2\pi$  wachsen. Man erhält

$$L = s(2\pi) = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + p^2} dt = 2\pi \sqrt{a^2 + p^2} = \sqrt{4a^2\pi^2 + h^2}.$$

<sup>1)</sup> In der Technik wird dieser Winkel mit  $\varphi$  bezeichnet.

Für das begleitende Dreiein erhält man:

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{x}}}{|\dot{\mathbf{x}}|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + p^2}} (-a \sin t \mathbf{i} + a \cos t \mathbf{j} + p \mathbf{k}), \quad (2.54)$$

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + p^2}} (-a \cos t \mathbf{i} - a \sin t \mathbf{j}),$$

$$\mathbf{n} = \frac{\dot{\mathbf{t}}}{|\dot{\mathbf{t}}|} = -(\cos t \mathbf{i} + \sin t \mathbf{j}), \quad (2.55)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -a \sin t & a \cos t & p \\ -\cos t & -\sin t & 0 \end{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{a^2 + p^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a^2 + p^2}} (p \sin t \mathbf{i} - p \cos t \mathbf{j} + a \mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Der Hauptnormalenvektor  $\mathbf{n}$  ist in jedem Punkt auch Flächennormalenvektor des Schraubzylinders, denn  $\mathbf{n}$  steht senkrecht zum Vektor  $\mathbf{k}$  der Schraubachse  $x_3$ . Dies folgt aus dem Verschwinden des Skalarproduktes der beiden Vektoren.

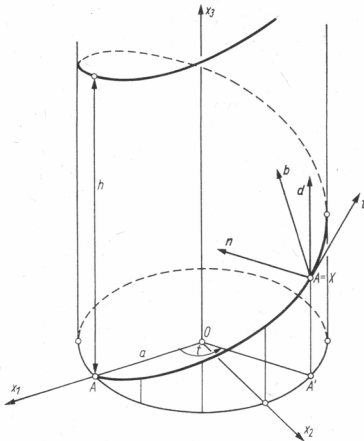


Bild 2.8. Gewöhnliche Schraubenlinie

Mithin ist die durch  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{b}$  aufgespannte Ebene Tangentialebene an den Schraubzylinder. Der Schraubzylinder wird von den rektifizierenden Ebenen der Schraubenlinie eingehüllt. Er stellt somit die rektifizierende Fläche der Schraubenlinie dar. Wickelt man den Schraubzylinder in die Ebene ab,

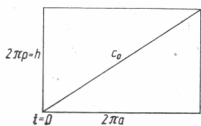


Bild 2.9. Bestimmung der Bogenlänge einer Schraubenlinie durch Abwicklung des Schraubzylinders

so wird aus dem Zylindermantel ein Rechteck der Breite  $2\pi a$  und der Höhe  $h$ , wenn wir den Zylinder nach oben so begrenzen, daß nur ein Schraubengang auf ihm Platz hat. Die Schraubenlinie geht bei der Abwicklung in eine Gerade über, nämlich in die Diagonale des erwähnten Rechtecks (vgl. Bild 2.9). Man erkennt, daß die Länge der Schraubenlinie sich bei der Abwicklung nicht geändert hat.<sup>1)</sup> Aus der Abbildung folgt  $L = \overline{AB} = \sqrt{4\pi^2 a^2 + h^2}$ .

Für die Krümmung  $\kappa$  der Schraubenlinie erhält man

$$\begin{aligned} \kappa &= |\mathbf{t}'| = \left| \dot{\mathbf{t}} \frac{dt}{ds} \right| = |\dot{\mathbf{t}}| \frac{dt}{ds} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + p^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + p^2}} \\ &= \frac{a}{a^2 + p^2}. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Für die Windung der Schraubenlinie ergibt sich

$$\begin{aligned} \tau &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{n}' = \frac{1}{\sqrt{a^2 + p^2}} (p \sin ti - p \cos tj + ak) \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 + p^2}} (\sin ti - \cos tj) \\ &= \frac{p}{a^2 + p^2}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

Damit ergibt sich für den Darbouxschen Vektor  $\mathbf{d} = \tau \mathbf{t} + \kappa \mathbf{b}$

$$\mathbf{d} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + p^2}} \mathbf{k}. \quad (2.59)$$

Man erkennt, daß der Darbouxsche Vektor Richtungsvektor der Erzeugenden des Schraubzylinders ist, wie es nach Abschnitt 2.8. sein muß, da der Schraubzylinder die rektifizierende Fläche der Schraubenlinie ist.

\* **Aufgabe 2.4:** Ein Drahtseil bestehe aus einem zylinderförmigen Kern, um den schraubenlinienartig  $N$  gleiche Drähte aufgewickelt sind. Der Abstand der Mittellinie jedes Drahtes von der Achse des Kerns sei  $r$ . Man gebe die Parameterdarstellungen der Mittellinien zweier benachbarter Drähte an, wenn die Mittellinien als Schraubenlinien mit der Ganghöhe  $h$  betrachtet werden.

\* **Aufgabe 2.5:** Ein Drahtseil werde über eine Welle gelegt, so daß ein gewisser Teil der Achse des Kerns die Gestalt eines Kreises vom Radius  $R$  annimmt. Dabei ändern sich auch die Kurven, die von den Mittellinien der einzelnen Drähte gebildet werden. Man gebe die Parameterdarstellungen der Mittellinien zweier benachbarter Drähte an, wenn angenommen wird, daß jede solche Mittellinie die Bahnkurve des Endpunktes einer Strecke der Länge  $r$  ist. Diese Strecke wird um die kreisförmige Achse verschraubt, wobei der andere Endpunkt ständig auf dem Kreis bleibt und die Strecke selbst

<sup>1)</sup> Die Schraubenlinie ist eine geodätische Linie auf dem Schraubzylinder (vgl. 4.2.8.).

senkrecht zur jeweiligen Kreistangente steht. Die kreisförmige Achse habe die Parameterdarstellung  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = R \cos \psi$ ,  $x_3 = R \sin \psi$ ,  $0 \leq \psi \leq \pi/2$ . Die Anfangslage des die erste Mittellinie erzeugenden Punktes habe die Koordinaten  $x_1 = r$ ,  $x_2 = R$ ,  $x_3 = 0$ . Für den Verschraubungswinkel  $\varphi$  der Strecke gelte  $\psi = \lambda \varphi$  ( $\lambda$  konstant).

Eine Raumkurve heißt **Böschungslinie**, wenn es eine feste Ebene gibt, so daß die Tangente in jedem Punkt der Raumkurve mit dieser Ebene ein und denselben konstanten Winkel bildet.

Oft ist es praktischer, die folgende Definition für Böschungslinien zu benutzen: Eine Raumkurve heißt Böschungslinie, wenn ihre sämtlichen Tangentenvektoren mit einer vorgegebenen Richtung einen festen Winkel einschließen.

Offensichtlich sind beide Definitionen gleichwertig.

Eine gewöhnliche Schraubenlinie ist stets eine Böschungslinie, denn jeder ihrer Tangentenvektoren  $\mathbf{t}$  bildet mit dem Vektor der Schraubachse  $\mathbf{k}$  einen festen Winkel. In der Tat gilt

$$\cos(\mathbf{t}, \mathbf{k}) = \mathbf{t} \cdot \mathbf{k} = \frac{p}{\sqrt{a^2 + p^2}} = \frac{\tau}{\sqrt{\kappa^2 + \tau^2}} = \text{konstant}.$$

*Aufgabe 2.6:* Man zeige, daß eine Raumkurve genau dann eine Böschungslinie ist, wenn der Quotient aus Windung und Krümmung konstant ist, d. h. wenn gilt \*

$$\frac{\tau(s)}{\kappa(s)} = K = \text{konstant}.$$

## 2.10. Die kanonischen Gleichungen einer Raumkurve

Es sei  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$  die Parameterdarstellung einer Raumkurve  $c$  von der Klasse  $r \geq 3$ , bezogen auf die Bogenlänge  $s$  von  $c$ .  $X_0$  sei ein Punkt auf  $c$ , für den  $s = 0$  ist. Um die Kurve  $c$  in einer hinreichend kleinen Umgebung von  $X_0$  untersuchen zu können, wird  $\mathbf{x}(s)$  an der Stelle  $s = 0$  nach Taylor entwickelt. Man erhält

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{x}(0) + \mathbf{x}'(0) \frac{s}{1!} + \mathbf{x}''(0) \frac{s^2}{2!} + \mathbf{x}'''(0) \frac{s^3}{3!} + \mathbf{o}(s^3). \quad (2.60)$$

Hierbei bedeutet  $\mathbf{o}(s^3)$  einen Vektor, dessen Komponenten von der Größenordnung  $o(s^3)$  sind. In diesem Zusammenhang heißt  $o(s^3)$ , daß mit  $s \rightarrow 0$  auch  $o(s^3)/s^3 \rightarrow 0$  strebt (vgl. Bd. 3, 4.6.1.). Es seien  $\mathbf{t}_0$ ,  $\mathbf{n}_0$ ,  $\mathbf{b}_0$  die Vektoren des begleitenden Dreieins im Punkt  $s = 0$ . Bezieht man die Vektorfunktion auf dieses Dreiein, so ist  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{o}$ , und es gilt

$$\mathbf{x}(s) = x_1(s) \mathbf{t}_0 + x_2(s) \mathbf{n}_0 + x_3(s) \mathbf{b}_0. \quad (2.61)$$

Man ersetzt nun in (2.60) die Ableitungen  $\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{x}''$ ,  $\mathbf{x}'''$  durch Ausdrücke in den Vektoren  $\mathbf{t}_0$ ,  $\mathbf{n}_0$ ,  $\mathbf{b}_0$ .

$$\mathbf{x}'(0) = \mathbf{t}_0,$$

$$\mathbf{x}''(0) = \mathbf{t}'_0 = \kappa(0) \mathbf{n}_0,$$

$$\mathbf{x}'''(0) = \kappa'(0) \mathbf{n}_0 + \kappa(0) \mathbf{n}'_0.$$

Aus der zweiten Frenetschen Gleichung folgt

$$\mathbf{n}'_0 = -\kappa(0) \mathbf{t}_0 + \tau(0) \mathbf{b}_0.$$

Damit geht (2.60) über in

$$\begin{aligned} x_1(s) \mathbf{t}_0 + x_2(s) \mathbf{n}_0 + x_3(s) \mathbf{b}_0 &= \frac{s}{1!} \mathbf{t}_0 + \kappa(0) \mathbf{n}_0 \frac{s^2}{2!} \\ &+ (\kappa'(0) \mathbf{n}_0 + \kappa(0) [-\kappa(0) \mathbf{t}_0 + \tau(0) \mathbf{b}_0]) \frac{s^3}{3!} + \dots \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man daraus

$$\begin{aligned} x_1(s) &= s - \kappa^2(0) \frac{s^3}{6} + o(s^3), \\ x_2(s) &= \kappa(0) \frac{s^2}{2} + \kappa'(0) \frac{s^3}{6} + o(s^3), \\ x_3(s) &= \kappa(0) \tau(0) \frac{s^3}{6} + o(s^3). \end{aligned} \quad (2.62)$$

Diese Gleichungen werden als **kanonische Gleichungen** oder auch als kanonische Entwicklung der Raumkurve  $c$  bezeichnet.

Betrachtet man die Kurve  $c$  in unmittelbarer Umgebung von  $X_0$ , so ist  $s$  sehr klein, und es genügt, wenn man jeweils das erste Glied der Entwicklung berücksichtigt. Man erhält so

$$\begin{aligned} x_1 &= s, \\ x_2 &= \frac{1}{2} \kappa_0 s^2, \\ x_3 &= \frac{1}{6} \kappa_0 \tau_0 s^3, \end{aligned}$$

wo  $\kappa_0 = \kappa(0)$  und  $\tau_0 = \tau(0)$  ist.

Betrachtet man ein kleines Stück der Kurve  $c$ , das den Punkt  $X_0$  enthält und projiziert man dieses Kurvenstück orthogonal in die  $x_2, x_3$ ,  $x_1, x_3$ - und in die  $x_1, x_2$ -Ebene, so erhält man drei Kurvenstücke  $c_1, c_2, c_3$ , die ebenfalls den Punkt  $X_0$  enthalten, da dieser mit dem Ursprung  $O$  des  $x_1, x_2, x_3$ -Koordinatensystems zusammenfällt. Das Verhalten der Kurvenstücke  $c_1, c_2, c_3$  in der Umgebung von  $X_0$  ergibt sich, wenn man die Größe  $s$  aus den entsprechenden zwei Gleichungen eliminiert.

Aus  $x_2 = \kappa_0 \frac{s^2}{2}$ ,  $x_3 = \kappa_0 \tau_0 \frac{s^3}{6}$  folgt

$$c_1: x_3 = \frac{\kappa_0}{\tau_0} \frac{9}{2} x_2^3.$$

Das ist eine *Neilsche Parabel*, die in  $O = X_0$  eine Spitze mit der  $x_2$ -Achse als Tangente hat. Aus

$x_1 = s$ ,  $x_3 = \kappa_0 \tau_0 \frac{s^3}{6}$  ergibt sich

$$c_2: x_3 = \frac{1}{6} \kappa_0 \tau_0 x_1^3,$$

eine *kubische Parabel*, die die  $x_1$ -Achse in  $O$  tangiert.



Aus  $x_1 = s$ ,  $x_2 = \kappa_0 \frac{s^2}{2}$  findet man

$$c_3: x_2 = \frac{1}{2} \kappa_0 x_1^2.$$

Dies ist eine gewöhnliche *Parabel* mit dem Scheitel  $O = X_0$  und der  $x_1$ -Achse als Scheiteltangente. Für kleine  $s$  stimmt die Kurve  $c$  gut mit der durch

$$x_1 = s, \quad x_2 = \kappa_0 \frac{s^2}{2}, \quad x_3 = \kappa_0 \tau_0 \frac{s^3}{6}$$

gegebenen Näherungskurve überein, und das gleiche gilt auch für die Kurven  $c_1, c_2, c_3$  und die drei orthogonalen Projektionen der Näherungskurve, die mit den drei gefundenen Parabeln identisch sind.

Demnach verhält sich die Projektion  $c_1$  von  $c$  in die Normalebene wie eine Neilsche Parabel, die Projektion  $c_2$  von  $c$  in die rektifizierende Ebene wie eine kubische Parabel und die Projektion  $c_3$  von  $c$  in die Schmiegebene wie eine gewöhnliche Parabel in der Umgebung eines beliebigen Punktes  $X$  der Kurve  $c$  (vgl. Bild 2.10).

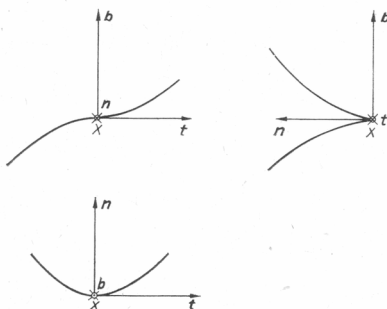


Bild 2.10. Die Projektionen einer Raumkurve in die Schmiegebene, Normalebene und rektifizierende Ebene

### 3. Ebene Kurven

#### 3.1. Die Parameterdarstellung und Krümmung ebener Kurven

Es sei  $\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j} + x_3(t)\mathbf{k}$  eine zulässige Parameterdarstellung der Klasse  $r \geq 1$  für  $a \leq t \leq b$ .

Nehmen wir an, daß die Funktion  $x_3(t)$  für alle Werte  $t$  verschwindet, so wird durch die obige Parameterdarstellung eine Kurve gegeben, die ganz in der  $x_1, x_2$ -Ebene liegt. Eine solche Kurve, die ganz in einer Ebene liegt, bezeichnet man als eine **ebene Kurve**. Da die Funktionen  $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$  außerdem  $r$ -mal ( $r \geq 1$ ) stetig differenzierbar sind, so ist eine zulässige Parameterdarstellung einer in der  $x_1, x_2$ -Ebene liegenden Kurve gegeben durch

$$\mathbf{x}(t) = x_1(t)\mathbf{i} + x_2(t)\mathbf{j}$$

bzw. durch

$$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t)). \quad (3.1)$$

Dabei wollen wir annehmen, daß die Funktionen  $dx_1/dt = \dot{x}_1(t)$ ,  $dx_2/dt = \dot{x}_2(t)$  nicht beide an derselben Stelle  $t$  verschwinden.

Für das **Bogenelement** erhält man nach (2.17)

$$ds = \sqrt{(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2} dt, \quad (3.2)$$

Damit ergibt sich für die **Bogenlänge**  $s(t)$  des Kurvenstücks zwischen dem Punkt  $X_0$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}(t_0)$  und dem Punkt  $X$ , gegeben durch  $\mathbf{x}(t)$ ,

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2} dt. \quad (3.3)$$

Der **normierte Tangentenvektor** (Einheitsvektor) hat die Gestalt

$$\mathbf{t} = \frac{\dot{\mathbf{x}}(t)}{|\dot{\mathbf{x}}(t)|} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} (\dot{x}_1\mathbf{i} + \dot{x}_2\mathbf{j}). \quad (3.4)$$

Die **Krümmung** einer ebenen Kurve wird etwas anders definiert als bei den Raumkurven. Man setzt

$$\kappa = \pm |\mathbf{t}'| = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\alpha}{dt} \cdot \frac{dt}{ds}. \quad (3.5)$$

Hierin bedeutet  $\alpha$  den Winkel zwischen der Tangente der Kurve im Punkt  $X$  und der positiven  $x_1$ -Achse. Somit ist  $d\alpha$  wieder Winkel zwischen benachbarten Tangenten. Das Pluszeichen in (3.5) gilt, wenn  $d\alpha/ds$  positiv ist. Andernfalls gilt das Minuszeichen. Man ordnet der Krümmung einer ebenen Kurve ein Vorzeichen zu, indem man dem Winkel  $d\alpha$  ein Vorzeichen gibt. Das ist bei einer Raumkurve nicht möglich.

Man könnte nun den Vektor  $\mathbf{t}'$  bilden und aus  $\mathbf{t}'$  die Krümmung  $\kappa$  ausrechnen. Da dies aber eine etwas umständliche Rechnung erfordert, gehen wir anders vor. Aus

der Differentialrechnung wissen wir, daß für den Neigungswinkel  $\alpha$  der Tangente einer ebenen Kurve gegen die positive  $x_1$ -Achse die Beziehung

$$\tan \alpha = \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{x}_1(t)} \quad (3.6)$$

gilt. Durch Differentiation der Gleichung (3.6) nach  $t$  findet man

$$(1 + \tan^2 \alpha) \frac{d\alpha}{dt} = \frac{\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}{\dot{x}_1^2}. \quad (3.7)$$

Damit erhalten wir

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}{\left[1 + \left(\frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1}\right)^2\right] \dot{x}_1^2} = \frac{\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}. \quad (3.8)$$

Für die Krümmung  $\kappa$  ergibt sich demnach aus (3.5) und (3.8), (3.2)

$$\kappa = \frac{\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}{[\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2]^{3/2}}. \quad (3.9)$$

Die Krümmung  $\kappa$  ist in einem Punkt  $X_0$  mit dem Parameterwert  $t_0$  positiv, wenn der Winkel  $\alpha$  der Kurventangente gegen die positive  $x_1$ -Richtung beim Durchgang durch die Stelle  $t = t_0$  mit wachsendem  $t$  ebenfalls wächst (vgl. Bild 3.1). Das heißt, daß

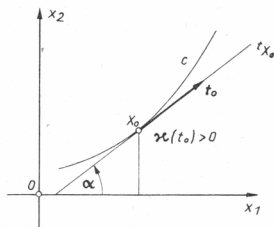


Bild 3.1

dann  $d\alpha/dt > 0$  ist. Man erkennt, daß das Vorzeichen der Krümmung von der gewählten Parameterdarstellung abhängt. Da der **Krümmungsradius**  $\varrho$  das Reziproke der Krümmung ist, findet man

$$\varrho = \frac{(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)^{3/2}}{\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1}. \quad (3.10)$$

Falls  $\kappa = 0$  ist, setzt man  $\varrho = \infty$ . Man erkennt aus (3.9) und (3.10), daß eine Parameterdarstellung einer ebenen Kurve mindestens zweimal differenzierbar sein muß, wenn man die Krümmung oder den Krümmungsradius berechnen will.

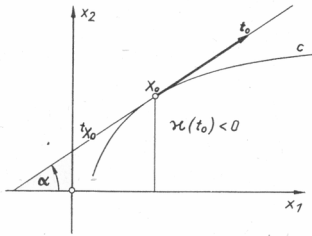


Bild 3.2

Bild 3.1 und 3.2 zeigen den Zusammenhang zwischen dem Kurvenverlauf in der Umgebung eines Punktes  $X_0$  einer ebenen Kurve  $c$  und dem Vorzeichen der Krümmung  $\kappa$ . Durchläuft man die Kurve an der Stelle  $t = t_0$  im Sinne wachsender Werte von  $t$ , so hat man sie so zu durchlaufen, wie die Pfeilrichtung des Vektors  $\mathbf{t} = \dot{\mathbf{x}}/|\dot{\mathbf{x}}|$  angibt. Bild 3.1 zeigt, daß bei einem solchen Durchlauf der Winkel  $\alpha$  wächst. Folglich ist  $d\alpha/dt > 0$  und auch  $\kappa > 0$ . Die Kurve  $c$  verläuft, wenn man in Pfeilrichtung blickt, in einer Umgebung des Kurvenpunktes  $X_0$  links von der Tangente  $t_X$ . Im Bild 3.2 jedoch nimmt beim Durchlauf in Pfeilrichtung des Vektors  $\mathbf{t}$  der Winkel  $\alpha$  in der Umgebung des Punktes  $X_0$  ab. Daher gilt  $d\alpha/dt < 0$  und somit  $\kappa < 0$ . Die Kurve  $c$  verläuft in der Umgebung von  $X_0$  rechts von der Tangente  $t_X$ . Die Bilder 3.3 und 3.4 zeigen den Kurvenverlauf im Fall  $\kappa(X_0) = \kappa(t_0) = 0$ . In diesem Fall hat die Funktion  $\kappa(t)$  an der Stelle  $t_0$  in der Regel einen Vorzeichenwechsel. Entweder ist  $\kappa(t) < 0$  für  $t < t_0$  und  $t$  hinreichend nahe bei  $t_0$  und  $\kappa(t) > 0$  für  $t > t_0$ , oder es gilt umgekehrt  $\kappa(t) > 0$  für  $t < t_0$  und  $\kappa(t) < 0$  für  $t > t_0$ . In beiden Fällen wechselt die Kurve im Punkt  $X_0$  von der einen Seite der Tangente auf die andere Seite. Man sagt, die Kurve hat in  $X_0$  einen **Wendepunkt**. Im Bild 3.3 liegt der erste der beschriebenen Fälle, im Bild 3.4 dagegen der zweite Fall vor. Verschwindet je-

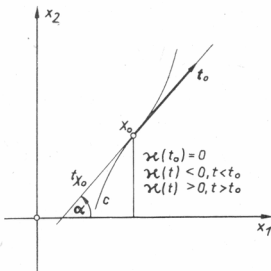


Bild 3.3

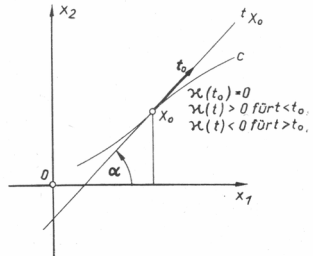


Bild 3.4

doch  $\kappa(t)$  ohne Vorzeichenwechsel an der Stelle  $t = t_0$ , so wechselt die Kurve in  $X_0$  nicht mehr von einer Seite der Tangente auf die andere. Dann hat die Kurve in  $X_0$  einen **Flachpunkt** (Bild 3.5) (vgl. [16], S. 78–80).

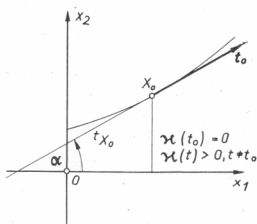


Bild 3.5. Ebene Kurve mit Flachpunkt

Schließlich wollen wir noch den **Krümmungsmittelpunkt**  $M(X)$  bestimmen. Für den Ortsvektor  $\mathbf{y}(t)$  des Krümmungsmittelpunktes  $M(X)$  gilt, wenn man  $\varrho$  nach Formel (3.10) berechnet,

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) + |\varrho| \mathbf{n}. \quad (3.11)$$

Der Hauptnormalenvektor  $\mathbf{n}$  ist dabei stets vom Punkt  $X$  nach dem Krümmungsmittelpunkt  $M(X)$  hin gerichtet, wenn man ihn als gerichtete Strecke vom Punkt  $X$  aus abträgt (vgl. Bild 3.6). Dies ist eine Folge der ersten Frenetschen Formel, die bei Verwendung der mit Vorzeichen behafteten Krümmung (3.9) lautet  $\mathbf{t}' = |\kappa| \mathbf{n}$ . Ist der Krümmungsradius  $\varrho$  positiv, so ist  $\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1 > 0$  und daher  $d\alpha/dt > 0$ .

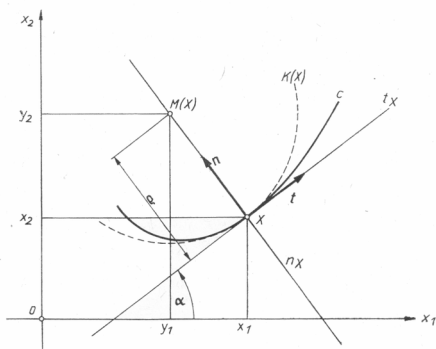


Bild 3.6. Hauptnormalenvektor, Krümmungsmittelpunkt und Krümmungskreis einer ebenen Kurve

Die Pfeilspitze von  $\mathbf{t}$  im Bild 3.6 gibt an, wie die Kurve in der Umgebung von  $X$  durchlaufen wird, wenn  $t$  wächst. Da der Winkel  $\alpha$  mit wachsendem  $t$  ebenfalls wächst (Bild 3.6), muß die Kurve in der Umgebung von  $X$  links der Tangente  $t_X$  verlaufen. Damit liegt auch  $M(X)$  links von der Tangente  $t_X$ , und  $\mathbf{n}$  hat die Gestalt

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} (-\dot{x}_2 \mathbf{i} + \dot{x}_1 \mathbf{j}),$$

denn es muß  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{t} = 0$  und  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = 1$  sein. Setzt man den Ausdruck für  $\mathbf{n}$  in (3.11) ein, so folgt

$$\mathbf{y}(t) = y_1(t) \mathbf{i} + y_2(t) \mathbf{j} = x_1(t) \mathbf{i} + x_2(t) \mathbf{j} + \frac{(\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2})^3 (-\dot{x}_2 \mathbf{i} + \dot{x}_1 \mathbf{j})}{(\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2) \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}}.$$

Durch Koeffizientenvergleich erhält man dann

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_1(t) - \dot{x}_2(t) \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}, \\ y_2(t) &= x_2(t) + \dot{x}_1(t) \frac{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}{\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Ist der Krümmungsradius  $\varrho$  jedoch negativ, so hat man  $d\alpha/dt < 0$ , und daher ist  $\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2 < 0$ , und die Kurve  $c$  verläuft rechts von der Tangente  $t_X$ . Der Vektor  $\mathbf{n}$  hat nun die Gestalt

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2}} (\dot{x}_2 \mathbf{i} - \dot{x}_1 \mathbf{j}),$$

und für den Betrag des Krümmungsradius  $\varrho$  gilt

$$|\varrho| = - \frac{(\sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2})^3}{\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \ddot{x}_1 \dot{x}_2}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in Gleichung (3.11) ein, so ergeben sich nach dem Koeffizientenvergleich dieselben Formeln wie in (3.12). Daher gelten die Gleichungen (3.12) unabhängig vom Vorzeichen des Krümmungsradius.

Durch den zu einem Punkt  $X$  einer ebenen Kurve gehörigen Krümmungsmittelpunkt  $M(X)$  und den Krümmungsradius  $\varrho$  wird der zum Punkt  $X$  gehörige **Krümmungskreis**  $k(X)$  bestimmt. Der Mittelpunkt des Krümmungskreises  $k(X)$  ist der Krümmungsmittelpunkt  $M(X)$ , der zugehörige Radius der Krümmungsradius  $\varrho$ . Der Krümmungskreis  $k(X)$  hat mit der Kurve  $c$  mindestens *drei infinitesimal benachbarte Punkte* gemein, die im Punkt  $X$  zusammengerückt sind. Daher *berührt* und *durchsetzt* der Krümmungskreis  $k(X)$  die Kurve  $c$  in  $X$  (vgl. Bild 3.6). Ein Punkt der ebenen Kurve  $c$ , für den die Krümmung  $\kappa(t)$  einen Extremwert annimmt, heißt ein **Scheitel** dieser Kurve. In einem Scheitel hat der Krümmungskreis mindestens *vier infinitesimal benachbarte Punkte* mit der Kurve gemein.<sup>1)</sup> Das hat zur Folge, daß der Krümmungskreis die Kurve in einem Scheitel *berührt*, aber *nicht durchsetzt*.

<sup>1)</sup> Im allgemeinsten Fall hat der Krümmungskreis in einem Scheitel eine gerade Anzahl von  $n \geq 4$  infinitesimal benachbarten Punkten mit der Kurve gemein.

### 3.2. Der Übergang von der Parameterdarstellung zur Kurvengleichung

Im folgenden wollen wir eine Umbenennung der Koordinaten vornehmen. Wir bezeichnen die  $x_1$ -Achse als  $x$ -Achse und die  $x_2$ -Achse als  $y$ -Achse. Aus dem orthogonalen  $x_1, x_2$ -System wird dann das orthogonale  $x, y$ -System. Die **Parameterdarstellung** einer ebenen Kurve dieser  $x, y$ -Ebene lautet dann

$$\mathbf{x}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j}. \quad (3.13)$$

Es ist also  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ . Ist etwa  $dx/dt \neq 0$ , so kann man die Gleichung  $x = x(t)$  zumindest im Kleinen nach  $t$  auflösen. Man erhält  $t = g(x)$ . Setzt man dies in die Gleichung  $y = y(t)$  ein, so folgt

$$y = y(g(x)) = f(x), \quad (3.14)$$

wenn wir für die zusammengesetzte Funktion  $y(g(x))$  abkürzend  $f(x)$  schreiben. Die Gleichung  $y = f(x)$  stellt die **explizite Form** (d. h. die nach  $y$  aufgelöste Form) der Gleichung der Kurve  $c$  dar.

Für die Gleichung der **Kurventangente** erhält man, wenn  $P_0$  mit den Koordinaten  $x_0, y_0$  ein beliebiger Punkt der Kurve  $c$  ist,

$$y - y_0 = f'(x_0) (x - x_0). \quad (3.15)$$

Hierin ist  $f'(x_0)$  die erste Ableitung der Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$ . Mit  $x$  und  $y$  werden in (3.15) die Koordinaten eines beliebigen Punktes der Tangente der Kurve  $c$  im Punkt  $P_0$  bezeichnet.

Die Gleichung (3.15) ist eine Folge der Punktrichtungsgleichung der Geraden. Für eine Gerade durch den Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  mit dem Neigungswinkel  $\alpha$  gegen die positive  $x$ -Achse findet man, wenn man  $\tan \alpha = m$  setzt, die Gleichung

$$y - y_0 = m(x - x_0). \quad (3.16)$$

Dabei wird  $m$  als Richtungsfaktor der Geraden bezeichnet. Daß dies die Gleichung einer Geraden ist, folgt aus der Linearität in  $x$  und  $y$ . Die Gerade geht durch  $P_0$ , da die Koordinaten von  $P_0$  die Gleichung (3.15) erfüllen. Da andererseits der Tangens des Neigungswinkels der Tangente der Kurve gegen die positive  $x$ -Achse gleich  $f'(x_0)$  ist, erhält man  $m = f'(x_0)$ . Dies in (3.16) eingesetzt, liefert die Gleichung (3.15).

Für die Gleichung der **Kurvennormale**  $n_x$  im Punkt  $X_0$  ergibt sich

$$y - y_0 = - \frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0). \quad (3.17)$$

Das folgt daraus, daß das Produkt der Richtungsfaktoren zweier zueinander senkrechter Geraden gleich  $-1$  ist.

Legt man an die Kurve mit der Gleichung  $y = f(x)$  durch den Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $x, y$  die Tangente  $t$  und die Normale  $n$ , so schneidet die  $x$ -Achse die Tangente  $t$  in einem Punkt  $T$  und die Normale in  $N$  (vgl. Bild 3.7). Bezeichnet  $S$  den Punkt auf der  $x$ -Achse mit den Koordinaten  $x, 0$ , so gilt für den **Tangentenabschnitt**<sup>1)</sup>

$$PT \text{ wegen } \tan \alpha = f'(x) \text{ und } \sin \alpha = \frac{f(x)}{PT}$$

$$\overline{PT} = \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \sqrt{1 + (f'(x))^2}. \quad (3.18)$$

<sup>1)</sup> Um die Positivität der rechten Seite von (3.18) zu sichern, werden Betragsstriche verwendet.

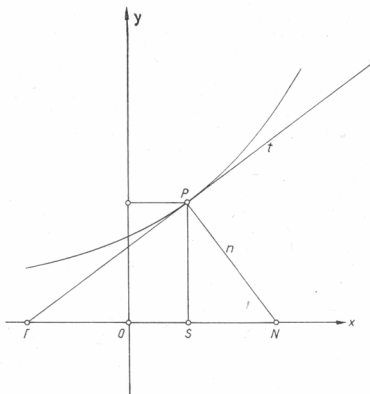


Bild 3.7. Tangente, Subtangente, Normale und Subnormale

Für den **Normalenabschnitt**<sup>1)</sup>  $\overline{PN}$  hat man wegen  $\cos \alpha = \frac{f(x)}{\overline{PN}}$

$$\overline{PN} = |f(x)| \sqrt{1 + (f'(x))^2}. \quad (3.19)$$

Analog erhält man für den **Subtangentenabschnitt**  $\overline{ST}$  aus  $\tan \alpha = \frac{f(x)}{\overline{ST}}$

$$\overline{ST} = \left| \frac{f(x)}{f'(x)} \right| \quad (3.20)$$

und für den **Subnormalenabschnitt**  $\overline{SN}$  schließlich wegen  $\tan \alpha = \frac{\overline{SN}}{f(x)}$

$$\overline{SN} = |f(x)f'(x)|. \quad (3.21)$$

Um das Bogenelement  $ds$  der Kurve mit der Gleichung  $y = f(x)$  zu erhalten, betrachten wir auf der Kurve zwei benachbarte Punkte  $P(x, y)$ ,  $\bar{P}(x + \Delta x, y + \Delta y)$  (vgl. Bild 3.8). Für die Bogenlänge  $\Delta s$  des Kurvenstücks  $\overline{P\bar{P}}$  gilt dann

$$\overline{P\bar{P}} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \leq \Delta s \leq \frac{\Delta x}{\cos \alpha} + \Delta y - \Delta x \tan \alpha = \overline{PP_1} + \overline{P_1\bar{P}}.$$

Hieraus folgt

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \leq \frac{\Delta s}{\Delta x} \leq \frac{1}{\cos \alpha} + \frac{\Delta y}{\Delta x} - \tan \alpha. \quad (3.22)$$

Läßt man nun  $\Delta x$  gegen null gehen, so strebt  $\Delta y/\Delta x$  gegen  $dy/dx = y'$  und  $\Delta s/\Delta x$  gegen  $ds/dx$ . Wegen  $\tan \alpha = y'$  und

$$\frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \sqrt{1 + y'^2}$$

<sup>1)</sup> Man kann den Tangenten-, Normalen-, Subtangenten- und Subnormalenabschnitt als Größen mit Vorzeichen definieren, vgl. [9], Band 2, S. 65.



folgt dann aus (3.22) zunächst

$$\sqrt{1 + y'^2} \leq \frac{ds}{dx} \leq \sqrt{1 + y'^2} + \frac{dy}{dx} - y'.$$

Da sich die beiden letzten Glieder auf der rechten Seite aufheben, folgt

$$\sqrt{1 + y'^2} \leq \frac{ds}{dx} \leq \sqrt{1 + y'^2},$$

und das ist gleichbedeutend mit

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + y'^2}. \quad (3.23)$$

Somit gilt für das **Bogenelement** einer Kurve mit der Gleichung  $y = f(x)$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (3.24)$$

Um die **Krümmung**  $\kappa$  dieser Kurve zu berechnen, differenziert man die Gleichung  $\tan \alpha = y'$  nach  $s$ . Man erhält

$$(1 + \tan^2 \alpha) \frac{d\alpha}{ds} = \frac{dy'}{ds} = \frac{dy'}{dx} \frac{dx}{ds} = y'' \frac{dx}{ds}.$$

Wegen  $\kappa = \frac{d\alpha}{ds}$  ergibt sich

$$\kappa = \frac{d\alpha}{ds} = y'' \frac{dx}{ds} \cdot \frac{1}{1 + y'^2} = y'' \cdot \frac{1}{1 + y'^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + y'^2}}.$$

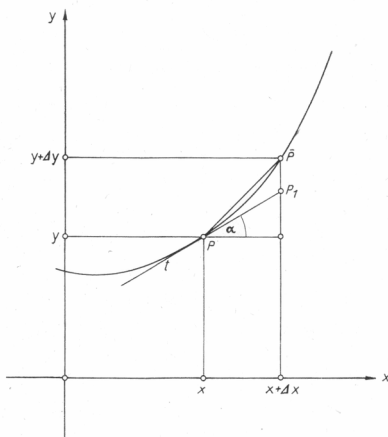


Bild 3.8. Bogenelement einer ebenen Kurve

Damit erhält man für die Krümmung  $\kappa$  den Ausdruck

$$\kappa = \frac{y''}{(\sqrt{1 + y'^2})^3}. \quad (3.25)$$

Für den **Krümmungsradius**  $\varrho$  ergibt sich

$$\varrho = \frac{(\sqrt{1 + y'^2})^3}{y''}. \quad (3.26)$$

Ist  $y'' = 0$ , so setzt man wieder  $\varrho = \infty$ .

Die Krümmung  $\kappa$  und der Krümmungsradius  $\varrho$  sind positiv, wenn der Winkel  $\alpha$  mit wachsendem  $x$  ebenfalls wächst, bzw. wenn  $y''$  positiv ist. Um die Koordinaten  $\xi, \eta$  des Krümmungsmittelpunktes  $M(X)$  zu erhalten, geht man von den Gleichungen

$$\frac{\dot{x}_2(t)}{\dot{x}_1(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} = \frac{dy}{dx} = y'$$

aus. Durch Differentiation nach  $x$  folgt

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right) \frac{dt}{dx} = \frac{\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^2} \frac{1}{\dot{x}} = \frac{d}{dx}(y') = y''.$$

Setzt man in (3.12)  $y_1 = \xi$ ,  $y_2 = \eta$ ,  $x_1 = x$ ,  $x_2 = y$  und berücksichtigt das eben gewonnene Ergebnis für  $y''$ , so erhält man

$$\xi = x - \dot{y} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^3 y''} = x - \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \frac{1 + \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2}{y''},$$

$$\eta = y + \dot{x} \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}^3 y''} = y + \frac{1 + \left( \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \right)^2}{y''}.$$

Dies ergibt schließlich

$$\begin{aligned} \xi &= x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Die Beziehungen (3.27) sind die den Formeln (3.12) entsprechenden Gleichungen zur Berechnung der Koordinaten  $\xi, \eta$  des Krümmungsmittelpunktes  $M$  eines beliebigen Punktes  $P(x, y)$  einer ebenen Kurve, die durch eine Gleichung in expliziter Form  $y = f(x)$  in kartesischen Koordinaten gegeben ist.

Haben zwei Kurven einen Punkt  $P_0$  und außerdem in  $P_0$  die Tangente gemeinsam, so sagt man, die Kurven berühren sich in  $P_0$ . Da eine Tangente als Grenzlage einer Sekante angesehen werden kann, deren zwei Schnittpunkte mit der Kurve im Berührungspunkt zusammengerückt sind, spricht man auch davon, daß die Tangente mit der Kurve *zwei infinitesimal benachbarte Punkte* gemeinsam hat. Ändert man die eine der beiden Kurven, die sich in  $P_0$  berühren, geringfügig ab, so daß sich beide Kurven in  $P_0$  und einem zweiten Punkt  $P_1$  schneiden, und strebt  $P_1$  gegen  $P_0$ , wenn man die Änderung wieder rückgängig macht und die abgeänderte Kurve ihre ursprüngliche Gestalt annimmt, dann geht die gemeinsame Sekante  $P_0P_1$  in die gemeinsame Tangente beider sich in  $P_0$  berührenden Kurven über. Die beiden sich in  $P_0$  berührenden Kurven haben also ebenfalls zwei in  $P_0$  zusammengerückte Punkte gemeinsam.

Verallgemeinerung dieser Überlegungen führt zum Begriff der Berührung  $n$ -ter Ordnung zweier Kurven.

Es sei eine feste Kurve  $y = f(x)$  und eine veränderliche Kurve  $y = G(x)$  gegeben, die den Punkt  $P_0$  und noch  $n$  weitere Punkte  $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$  gemeinsam haben. Die Kurve  $y = G(x)$  kann so verändert werden, daß sie in eine Grenzkurve  $y = g(x)$  übergeht. Bei diesem Übergang bleiben die Punkte  $P_0, P_1, \dots, P_n$  ständig gemeinsame Punkte beider Kurven, nähern sich aber mehr und mehr dem Punkt  $P_0$ , mit dem sie alle zusammenrücken, sobald die Kurve  $y = G(x)$  in die Grenzkurve  $y = g(x)$  übergegangen ist. Man sagt dann, daß die Kurven  $y = f(x)$  und  $y = g(x)$  in  $P_0$  genau  $n+1$  infinitesimal benachbarte Punkte gemeinsam haben.

Um eine analytische Bedingung für diesen Sachverhalt zu gewinnen, bildet man die Funktion  $H(x) = f(x) - G(x)$ . Dann gilt

$$H(x_0) = H(x_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

wobei  $x_i, y_i$  die Koordinaten der Punkte  $P_i$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ) sind. Ist etwa  $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_r < x_0 < x_{r+1} < \dots < x_n$ , so verschwindet  $H'(x)$  nach dem Satz von Rolle (vgl. Band 2, 6.1.) an  $n$  verschiedenen Stellen  $x'_i, x'_j$  mit  $x_i < x'_i < x_{i+1}$  für  $i = 1, 2, \dots, r-1$ ,  $x_r < x'_0 < x_0$ ,  $x_j < x'_j < x_{j+1}$  für  $j = r+1, r+2, \dots, n-1$ ,  $x_0 < x'_0 < x_{r+1}$ . Aus dem gleichen Grund verschwindet  $H''(x)$  an mindestens  $n-1$  Stellen zwischen  $x'_1$  und  $x'_n$ , die ihrerseits wieder zwischen  $x_1$  und  $x_n$  liegen. Setzt man diese Überlegung fort, so folgt, daß  $H^{(k)}(x)$  an mindestens  $n+1-k$  verschiedenen Stellen zwischen  $x_1$  und  $x_n$  gleich null ist. Dabei kann  $k$  die Werte  $1, 2, \dots, n$  annehmen. Geht nun die Kurve  $y = G(x)$  in die Grenzkurve  $y = g(x)$  über, so gehen  $H(x)$  in  $h(x) = f(x) - g(x)$ ,  $H^{(k)}(x)$  in  $h^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - g^{(k)}(x)$  über. Die Punkte  $P_1, P_2, \dots, P_n$  sind alle mit dem Punkt  $P_0$  zusammengerückt. Daher gilt  $x_0 = x_1 = x_2 = \dots = x_n$ ,  $y_0 = y_1 = y_2 = \dots = y_n$ . Wegen des Verschwindens von  $H^{(k)}(x)$  zwischen  $x_1$  und  $x_n$  für  $k = 1, 2, \dots, n$  ergibt sich  $h'(x_0) = h''(x_0) = \dots = h^{(n)}(x_0) = 0$ . Dagegen ist i. allg.  $h^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ ; denn die Kurven  $y = f(x)$  und  $y = g(x)$  haben zwischen  $P_1$  und  $P_n$  nur  $n-1$  Schnittpunkte. Aus den obigen Gleichungen folgt  $f(x_0) = g(x_0)$ ,  $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0)$  für  $k = 1, 2, \dots, n$  und i. allg.  $f^{(n+1)}(x_0) \neq g^{(n+1)}(x_0)$ . Daher definiert man:

Zwei Kurven  $y = f(x)$  und  $y = g(x)$  berühren sich an der Stelle  $x = x_0$  von genau  $n$ -ter Ordnung, wenn gilt

$$\begin{aligned} f(x_0) &= g(x_0), \\ f^{(k)}(x_0) &= g^{(k)}(x_0), & k = 1, 2, \dots, n, \\ f^{(n+1)}(x_0) &\neq g^{(n+1)}(x_0). \end{aligned}$$

### 3.3. Beispiele

1. Als Beispiel einer ebenen Kurve in Parameterdarstellung betrachten wir die Kurve mit der Darstellung

$$\mathbf{x}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$$

für  $-\infty < t < +\infty$ . Es ist  $x_1(t) = t$ ,  $x_2(t) = t^2$ . Durch Elimination von  $t$  erhält man  $x_2 = x_1^2$ .

Dies ist die Gleichung einer Parabel. Es soll die Krümmung, der Krümmungsradius und der Krümmungskreis für die Punkte mit den Parameterwerten  $t = 0$  und  $t = 1$  bestimmt werden. Aus  $\dot{x}_1 = 1$ ,  $\dot{x}_2 = 2t$  folgt zunächst aus (3.9) mit  $\ddot{x}_1 = 0$ ,  $\ddot{x}_2 = 2$

$$\kappa(t) = \frac{2 \cdot 1 - 0 \cdot 2 \cdot t}{(\sqrt{1 + 4t^2})^3} = \frac{2}{(\sqrt{1 + 4t^2})^3}.$$

Demnach ist  $\kappa(0) = 2$ ,  $\varrho(0) = 1/\kappa(0) = 1/2$ . Der zugehörige Krümmungsmittelpunkt hat wegen (3.12) die Koordinaten  $y_1(t) = t - 2 \cdot t(1 + 4t^2)/2$ ,  $y_2(t) = t^2 + (1 + 4t^2)/2$ . Demnach hat  $M(0)$  die Koordinaten  $y_1 = 0$ ,  $y_2 = 1/2$ . Für  $t = 1$  findet man  $\kappa(1) = 2/(\sqrt{5})^3$ ,  $\varrho(1) = 5\sqrt{5}/2 \approx 5,59$ . Für die Koordinaten von  $M(1)$  erhält man  $y_1(1) = -4$ ,  $y_2(1) = 3,5$ .

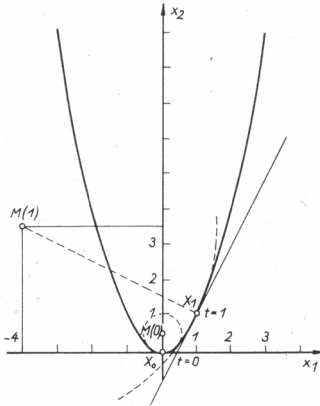


Bild 3.9. Parabel mit Krümmungskreisen

Im Bild 3.9 ist die Parabel mit den beiden Punkten  $X_0$ ,  $X_1$  und den beiden Krümmungskreisen dargestellt. Man erkennt, daß der zum Punkt  $X_1$  gehörige Krümmungskreis die Parabel in  $X_1$  berührt und durchsetzt. Die Krümmung  $\kappa(t) = 2/(\sqrt{1 + 4t^2})^3$  hat für  $t = 0$  ein Maximum. Daher ist der Punkt  $X_0$  ein Scheitel der Kurve. Im Scheitel  $X_0$  berührt der Krümmungskreis die Kurve sogar in vier infinitesimal benachbarten Punkten. Daher durchsetzt der Krümmungskreis die Kurve dort nicht. Man erkennt das, wenn man den Krümmungskreis und die Parabel zum Schnitt bringt:

$$k(X_0): x_1^2 + (x_2 - \tfrac{1}{2})^2 = \tfrac{1}{4},$$

$$k: x_2 = x_1^2.$$

Setzt man für  $x_1^2$  in der ersten Gleichung den entsprechenden Ausdruck aus der zweiten Gleichung ein, so folgt  $x_2^2 = 0$ . Hieraus ergibt sich  $x_{2(1)} = 0$ ,  $x_{2(2)} = 0$ .

Das sind zwei zusammenfallende Lösungen (Doppelwurzel). Setzen wir dies in die zweite Gleichung  $x_2 = (x_1)^2$  ein, so erhält man zu jedem Wert  $x_{2(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) zwei Werte  $x_{1(i)}$ ,  $x_{1(i)}$ . Das ergibt insgesamt die vier Lösungen  $(0, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(0, 0)$ ,  $(0, 0)$ , die aber alle miteinander übereinstimmen. Das bedeutet, daß in  $X_0$  die vier Schnittpunkte des Krümmungskreises und der Parabel zusammen-

gerückt sind. Der Krümmungskreis  $k(X_0)$  hat also wie behauptet, vier infinitesimal benachbarte Punkte mit der Parabel gemein.<sup>1)</sup> Die Krümmung der Parabel ist bei der gewählten Parameterdarstellung in allen Punkten positiv, da der Winkel  $\alpha$  mit wachsendem  $t$  stets wächst. Hätte man statt dessen die Parameterdarstellung  $x_1 = -t$ ,  $x_2 = t^2$  gewählt, so hätte man zwar dieselbe Parabel erhalten, denn die Elimination von  $t$  führt zur selben Gleichung  $x_2 = x_1^2$ . Die Krümmung  $\kappa$  ergibt sich aber bei dieser Darstellung zu

$$\kappa(t) = -\frac{2}{(\sqrt{1 + (4t)^2})^3},$$

ist also für alle Werte von  $t$  und damit für alle Punkte der Parabel negativ.

2. Als zweites Beispiel soll die Krümmung, der Krümmungsradius und der Krümmungskreis für die Punkte  $x = \pi/3$  und  $x = \pi/2$  der Sinuslinie  $y = \sin x$  bestimmt werden. Hier ist die ebene Kurve durch eine explizite Gleichung gegeben. Wir werden zur Berechnung der Krümmung die

Formel (3.25)  $\kappa = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$  heranziehen. Es ist  $y' = \cos x$ ,  $y'' = -\sin x$ . Für den Punkt mit der Abszisse  $x = \pi/3$  erhalten wir  $\sin \pi/3 = \sqrt{3}/2$ ,  $\cos \pi/3 = 1/2$ . Dann wird

$$\kappa(\pi/3) = \frac{-\sqrt{3}/2}{(\sqrt{1 + 1/4})^3} = \frac{-8\sqrt{3}}{2 \cdot 5\sqrt{5}},$$

$$\kappa(\pi/3) = -4\sqrt{15}/25 \approx -0,61968,$$

$$\rho(\pi/3) = -5\sqrt{15}/12 \approx -1,613.$$

Für die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes erhält man

$$\xi = x - \cos x \left( \frac{1 + \cos^2 x}{-\sin x} \right), \quad \eta = \sin x - \frac{1 + \cos^2 x}{\sin x}.$$

Daraus ergibt sich für  $x = \pi/3$ :

$$\xi = \frac{\pi}{3} + \frac{5}{12}\sqrt{3} \approx 1,7688,$$

$$\eta = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{5}{6}\sqrt{3} \approx -0,5773.$$

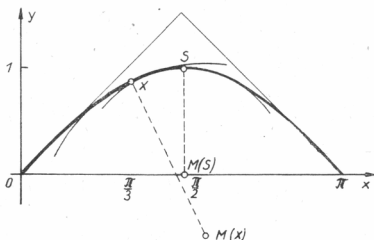


Bild 3.10. Sinuslinie mit Krümmungskreisen

<sup>1)</sup> Im Scheitel berührt der Krümmungskreis die Parabel von 3. Ordnung (siehe S. 47).

Im Bild 3.10 ist die Kurve  $y = \sin x$  und der zu  $x = \pi/3$  gehörige Krümmungsmittelpunkt sowie der Krümmungskreis dargestellt. Für den Punkt  $x = \pi/2$  hat die Funktion

$$\kappa(x) = -\frac{\sin x}{(\sqrt{1 + \cos^2 x})^3}$$

einen Extremwert, und zwar ein Maximum. Daher hat die Kurve  $y = \sin x$  an der Stelle  $x = \pi/2$  einen Scheitel. Man erhält  $\kappa(\pi/2) = -1$ ,  $\varrho(\pi/2) = -1$ . Der zugehörige Krümmungsmittelpunkt hat die Koordinaten  $\xi = \pi/2$ ,  $\eta = 0$ . Im Punkt  $x = 0$  ergibt sich  $\kappa = 0$ . Für Punkte, die hinreichend nahe bei Null liegen und für die  $x < 0$  ist, ergibt sich  $\kappa(x) > 0$ , für Punkte mit  $x > 0$  in der Nähe von Null folgt  $\kappa(x) < 0$ . Daher hat die Funktion  $\kappa(x)$  an der Stelle  $x = 0$  einen Vorzeichenwechsel. Die Kurve  $y = \sin x$  hat bei  $x = 0$  einen Wendepunkt.

3. Als letztes Beispiel sollen alle Kurven mit konstantem Tangentenabschnitt bestimmt werden. Für solche Kurven gilt nach (3.18)

$$\overline{TX} = \sqrt{y^2 + \left(\frac{y}{y'}\right)^2} = \left|\frac{y}{y'}\right| \sqrt{1 + (y')^2} = k,$$

wo  $k$  eine positive Konstante ist. Durch Quadrieren findet man

$$y^2(1 + y'^2) = k^2 y'^2.$$

Löst man diese Gleichung nach  $y'$  auf, so erhält man

$$y' = \pm \frac{y}{\sqrt{k^2 - y^2}}.$$

Man setzt  $y' = dy/dx$  und trennt die Veränderlichen und integriert

$$\pm \int \frac{\sqrt{k^2 - y^2}}{y} dy = \int dx.$$

Um das Integral auf der linken Seite auszuwerten, kann man  $y = k \sin t$  substituieren. Man erhält dann nach einiger Rechnung, wenn man  $t$  wieder durch  $y$  ausdrückt,

$$\pm k \left( \ln \left| \frac{k - \sqrt{k^2 - y^2}}{y} \right| + \frac{1}{k} \sqrt{k^2 - y^2} \right) = x - x_0.$$

Differenziert man diese Gleichung nach  $x$ , so erhält man die vorhergehende. Dies beweist die Richtigkeit der zuletzt gefundenen Gleichung. Wenn man diese Gleichung noch nach  $x$  auflöst, so kann man schreiben

$$x = x_0 \pm \left( k \ln \left| \frac{y}{k + \sqrt{k^2 - y^2}} \right| + \sqrt{k^2 - y^2} \right).$$

Hierin ist  $x$  eine Funktion von  $y$ . Die abhängige Variable hat nur reelle Werte, wenn  $y$  die Bedingung  $-k \leq y \leq k$  erfüllt. Für ein  $y$ , das der Bedingung genügt, erhält man zwei reelle Werte für  $x$ , die symmetrisch zum Punkt  $x_0$  auf der  $x$ -Achse liegen. Daher ist die Gerade  $x = x_0$  eine Symmetrieachse der durch die obige Gleichung dargestellten Kurve. Da man für  $y$  und  $-y$  dieselben zwei Wertepaare für  $x$  erhält, ist die Kurve auch symmetrisch zur  $x$ -Achse. Für  $y = 0$  ergibt sich  $x = \pm\infty$ . Das heißt, daß die  $x$ -Achse eine Asymptote der Kurve ist. Die Kurve besteht aus zwei durch die  $x$ -Achse getrennten Teilen, von denen der eine durch Spiegelung an der  $x$ -Achse aus dem anderen erhalten werden kann. Jeder der beiden Teile zerfällt in zwei Zweige, je nachdem, ob man in der obigen Gleichung das positive oder das negative Vorzeichen verwendet. Beide Zweige treffen sich im Punkt mit den Koordinaten  $x = x_0$ ,  $y = k$ . Bei gleichem  $y$  unterscheiden sich die Ableitungen beider Zweige nur im Vorzeichen, denn es gilt

$$y' = \pm \frac{y}{\sqrt{k^2 - y^2}}.$$

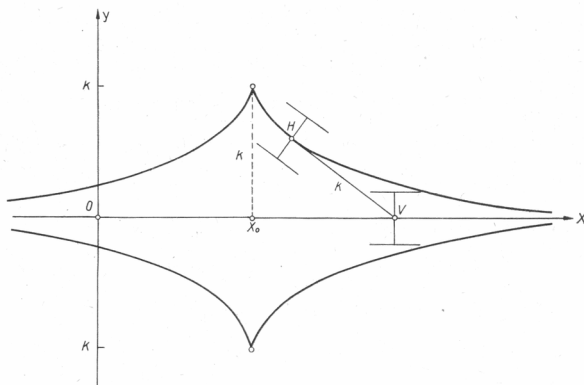


Bild 3.11. Schleppkurve

Für  $y \rightarrow k$  ergibt sich  $y' \rightarrow \pm\infty$ . Daher haben beide Zweige die Gerade  $x = x_0$  als Tangente und berühren sie im Punkt  $x = x_0, y = k$ . Da stets  $y \leq k$  ist, hat der obere Teil der Kurve im Punkt  $x = x_0, y = k$  eine Spitze mit der zur y-Achse parallelen Tangente  $x = x_0$  (siehe Bild 3.11). Die Kurve heißt **Schleppkurve** oder **Traktrix**. Sie wurde von Christian Huygens (1629–1695) zuerst beschrieben. Sie entsteht, wenn ein zweiachsiger Wagen so bewegt wird, daß der Mittelpunkt der drehbaren Vorderachse ständig auf der x-Achse bleibt. Dann beschreibt der Mittelpunkt der Hinterachse die Schleppkurve, wobei noch angenommen wird, daß beide Mittelpunkte den Abstand  $k$  voneinander haben. Die Verbindungsgerade beider Achsmittelpunkte ist stets Tangente an die Kurve. Die durch die beiden Achsmittelpunkte bestimmte Strecke der Länge  $k$  entspricht daher dem konstanten Tangentenabschnitt der Traktrix.

**Aufgabe 3.1:** Man bestimme alle Kurven mit a) konstantem Normalenabschnitt, b) konstantem Subtangentenabschnitt, c) konstantem Subnormalenabschnitt. \*

**Aufgabe 3.2:** An zwei benachbarten Masten einer Hochspannungsleitung ist in der Höhe  $l = 25$  m die Leitung angebracht. Die Länge eines Leitungsdrahtes zwischen beiden Masten betrage  $L = 86$  m. Der Abstand der beiden benachbarten Masten sei 80 m. Wie hoch hängt die Leitung an ihrer tiefsten Stelle über dem Erdboden, wenn angenommen wird, daß sie in Form einer Kettenlinie mit der Gleichung  $y = h \cosh(x/h) + b$  durchhängt? \*

**Aufgabe 3.3:** Man berechne die Krümmung und den Krümmungsradius der Schleppkurve. \*

**Aufgabe 3.4:** Ein Kreis vom Radius  $r$  rolle ohne zu gleiten auf einem festen Kreis vom Radius  $R$ . Mit dem beweglichen Kreis ist ein Punkt  $X$  fest verbunden, der von dessen Mittelpunkt den Abstand  $l$  hat und in der Ebene dieses Kreises liegt. Es ist die Parameterdarstellung der ebenen Kurve aufzustellen, die der Punkt  $X$  beschreibt. Es ist dabei der Fall der Außenabrollung, bei der der Rollkreis sich außerhalb des festen Kreises befindet, vom Fall der Innenabrollung zu unterscheiden. Der Mittelpunkt des festen Kreises sei Ursprung eines orthogonalen  $x_1, x_2$ -Koordinatensystems. Der Rollvorgang beginne im Punkt  $P_0(R, 0)$ , dem Berührungspunkt beider Kreise in der Anfangslage. Dabei fällt  $X$  mit dem Punkt  $X_0$  zusammen (vgl. Bild 3.12). \*

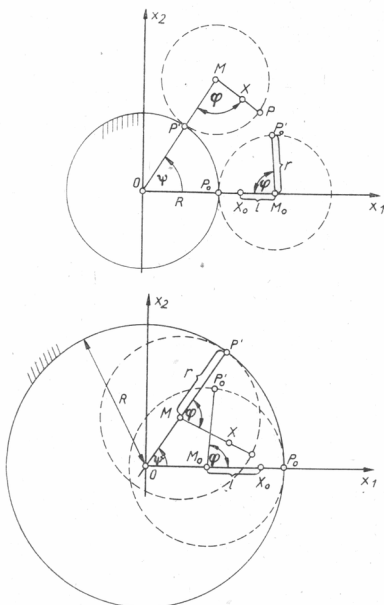


Bild 3.12. Zu Aufgabe 3.4

- \* **Aufgabe 3.5:** Ein Kreis rolle ohne zu gleiten auf einer Geraden in einer Ebene. Der Radius des Kreises sei  $r$ . Man gebe die Parameterdarstellung der Bahnkurve an, die ein Punkt  $X$  der Peripherie des Kreises beschreibt. Man wähle als Gerade die  $x_1$ -Achse des  $x_1, x_2$ -Koordinatensystems. Der Rollkreis berühre die  $x_1$ -Achse in der Anfangslage im Ursprung  $O$ . Der die gesuchte Kurve beschreibende Punkt  $X$  falle in der Anfangslage  $X_0$  ebenfalls mit  $O$  zusammen. Der Mittelpunkt des Rollkreises habe die positive Ordinate  $x_2 = r$ . Die betrachtete Bahnkurve des Punktes  $X$  heißt *gewöhnliche* (gespitzte) *Zykloide*.
- \* **Aufgabe 3.6:** Man berechne die Länge des Kurvenbogens der in Aufgabe 3.5 betrachteten Zykloide, der zwei aufeinander folgende Punkte der  $x_1$ -Achse verbindet. Wie groß ist der Krümmungsradius eines Punktes der Zykloide, für den die Ordinate  $x_2$  maximal ist?



### 3.4. Ebene Kurven in impliziter Form

Es sei  $c$  eine ebene Kurve in der  $x, y$ -Ebene mit der Parameterdarstellung  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Es sei  $F$  eine zweimal stetig differenzierbare Funktion der zwei Veränderlichen  $x, y$ , die folgende Eigenschaft hat: Setzt man  $x(t)$  und  $y(t)$  für  $x$  und  $y$  in die Gleichung  $F(x, y) = 0$  ein, so soll die entstehende Gleichung

$$F(x(t), y(t)) = 0 \quad (3.28)$$

für alle  $t \in [a, b]$  erfüllt sein. Man sagt dann, daß die Gleichung (3.28) identisch in  $t$  erfüllt ist. Die Gleichung

$$F(x, y) = 0 \quad (3.29)$$

wird als Gleichung der Kurve  $c$  in **impliziter Form** bezeichnet. Allerdings kann es vorkommen, daß es noch andere Kurven gibt, deren Parameterdarstellungen die Gleichung (3.29) erfüllen. Dann faßt man alle Kurven, deren Parameterdarstellungen (3.29) erfüllen, zu einer einzigen Kurve zusammen, und (3.29) wird dann als Gleichung dieser neuen Kurve angesehen. Andererseits kann jede Gleichung zwischen zwei Veränderlichen als Gleichung einer ebenen Kurve aufgefaßt werden. Durch Differentiation von (3.29) nach  $x$  erhält man, wenn man beachtet, daß  $y$  eine Funktion von  $x$  ist,

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0.$$

Hieraus ergibt sich, wenn  $\partial F/\partial y \neq 0$  ist,

$$y' = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = - \frac{F_x}{F_y}. \quad (3.30)$$

Wenn man die Gleichung (3.29) nach  $y$  auflösen kann, so erhält man eine Gleichung der Gestalt  $y = f(x)$ , d. h., die Kurve  $c$  ist in expliziter Form gegeben. Die Tangente bzw. die Normale von  $c$  haben dann nach (3.15) und (3.17) die Gleichungen

$$y - y_0 = f'(x_0) (x - x_0)$$

bzw.

$$y - y_0 = - \frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0).$$

Dabei sind  $x_0, y_0$  die Koordinaten des Berührungspunktes  $P_0$  der Tangente auf der Kurve  $c$  bzw. die Koordinaten des Schnittpunktes  $P_0$  der Normale mit der Kurve  $c$ . Setzt man in die obigen Gleichungen für  $f'(x_0) = y'(x_0)$  den Ausdruck aus Gleichung (3.30) ein, so erhält man nach Beseitigung der Nenner

$$F_x(x_0, y_0) (x - x_0) + F_y(x_0, y_0) (y - y_0) = 0 \quad (3.31)$$

als Gleichung der Tangente im Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  bei implizit gegebener Kurvengleichung von  $c$ . Ebenso ergibt sich

$$F_y(x_0, y_0) (x - x_0) - F_x(x_0, y_0) (y - y_0) = 0 \quad (3.32)$$

als Gleichung der Normale der Kurve  $c$  im Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  bei implizit gegebener Kurvengleichung. Um die Krümmung einer solchen implizit gegebenen Kurve berechnen zu können, geht man von der Gleichung (3.30)

$$y'(x) = - \frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)}$$

aus. Durch Differentiation nach  $x$  findet man

$$y'' = - \frac{(F_{xx} + F_{xy}y') F_y - F_x(F_{xy} + F_{yy}y')}{F_y^2}.$$

Beachtet man, daß infolge des Satzes von Schwarz (vgl. Bd. 4, Satz 3.1)  $F_{xy} = F_{yx}$  gilt, und setzt man die erhaltenen Ausdrücke für  $y'$  und  $y''$  in Gleichung (3.25) für  $\kappa$  ein, so ergibt sich

$$\kappa = - \frac{F_{xx}F_y^2 - 2F_{xy}F_xF_y + F_{yy}F_x^2}{(\sqrt{F_x^2 + F_y^2})^3} \quad (3.33)$$

und

$$\varrho = \frac{1}{\kappa}.$$

Verschwenden in einem Punkt  $P_0(x_0, y_0)$  der Kurve mit der Gleichung  $F(x, y) = 0$  auch die Ableitungen  $F_x$  und  $F_y$ , so hat man

$$F(x_0, y_0) = 0, \quad F_x(x_0, y_0) = 0, \quad F_y(x_0, y_0) = 0.$$

Ein solcher Punkt wird als **singulärer Punkt** der Kurve bezeichnet (vgl. [2], S. 502). Die Formel (3.30) zur Bestimmung von  $y'$  versagt in einem solchen Punkt, weil ihr Zähler und ihr Nenner gleichzeitig verschwinden. Der Quotient  $\frac{F_x}{F_y}$  nimmt in  $P_0$  den unbestimmten Wert  $\frac{0}{0}$  an. Man wendet nun die Regel von Bernoulli – l'Hospital auf diesen Ausdruck an, indem man Zähler und Nenner getrennt nach  $x$  differenziert, wobei man die Abhängigkeit von  $y$  und  $y'$  von  $x$  beachtet. Darauf führt man den Grenzübergang  $x \rightarrow x_0$  aus, wobei  $y(x) \rightarrow y(x_0) = y_0$  und  $y'(x) \rightarrow y'(x_0) = y'_0$  streben. Man erhält

$$y'_0 = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_x}{F_y} = - \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F_{xx} + F_{xy}y'}{F_{yx} + F_{yy}y'} = - \frac{F_{xx}(x_0, y_0) + F_{xy}(x_0, y_0) y'_0}{F_{yx}(x_0, y_0) + F_{yy}(x_0, y_0) y'_0}.$$

Hieraus folgt<sup>1)</sup>, wenn man zur Abkürzung

$$F_{xx}(x_0, y_0) = F_{xx}^0,$$

$$F_{xy}(x_0, y_0) = F_{xy}^0,$$

$$F_{yy}(x_0, y_0) = F_{yy}^0$$

setzt,

$$(y'_0)^2 + 2 \frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0} y'_0 + \frac{F_{xx}^0}{F_{yy}^0} = 0.$$

<sup>1)</sup> Falls  $F_{xx}$ ,  $F_{xy}$ ,  $F_{yy}$  nicht alle an der Stelle  $x_0, y_0$  verschwinden, sonst muß die Regel von l'Hospital nochmals angewendet werden.

Daraus ergibt sich

$$y'_0 = -\frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0} \pm \frac{\sqrt{(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0}}{F_{yy}^0}.$$

Man setzt

$$\Delta = (F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0.$$

Ist  $\Delta > 0$ , so hat  $y'_0$  zwei reelle Werte. Es liegt in  $P_0$  ein **Doppelpunkt** mit zwei verschiedenen reellen Tangenten vor.

Ist dagegen  $\Delta < 0$ , so hat  $y'_0$  keinen reellen Wert. Dann ist  $P_0$  ein **Einsiedlerpunkt**, das heißt ein isolierter Punkt der Kurve, der keine reellen Tangenten besitzt.

Ist schließlich  $\Delta = 0$ , so hat die Kurve in  $P_0$  eine doppelt zählende Tangente. Das bedeutet, daß in  $P_0$  entweder eine **Spitze** oder ein **Selbstberührungspunkt** der Kurve vorliegt.

Als Beispiel werde die Kurve mit der Gleichung

$$F(x, y) = by^2 - x^2(x - a) = 0, \quad a < 0, \quad b > 0,$$

betrachtet. Es ist  $F_x = -3x^2 + 2ax$ ,  $F_{xx} = -6x + 2a$ ,  $F_y = 2by$ ,  $F_{yy} = 2b$ ,  $F_{xy} = 0$ . Für den Punkt  $O$  mit den Koordinaten  $x = 0$ ,  $y = 0$  gilt  $F(0, 0) = 0$ ,  $F_x(0, 0) = 0$ ,  $F_y(0, 0) = 0$ . Der Ursprung  $O$  ist offensichtlich ein singulärer Punkt der Kurve. Um zu erkennen, was für ein singulärer Punkt vorliegt, berechnen wir die Diskriminante  $\Delta$  an der Stelle  $x = 0$ ,  $y = 0$ . Wir erhalten

$$\Delta(0) = (F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0 = 0 - (2a)(2b) = -4ab > 0,$$

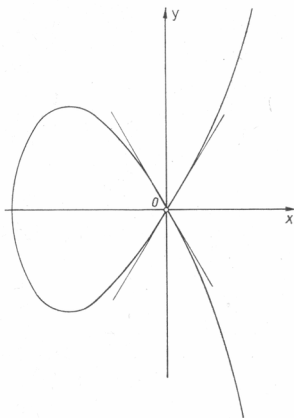


Bild 3.13. Kurve mit Doppelpunkt

da  $a < 0$  und  $b > 0$  sein soll. Es liegt in  $O$  ein Doppelpunkt mit zwei reellen Tangenten vor. Wir berechnen noch den Anstieg dieser beiden Tangenten. Dazu gehen wir von der Formel

$$y'_0 = -\frac{F_{xy}^0}{F_{yy}^0} \pm \frac{\sqrt{(F_{xy}^0)^2 - F_{xx}^0 F_{yy}^0}}{F_{yy}^0}$$

aus. Wir erhalten  $y'_0 = \pm \sqrt{-4ab/2b}$ . Um eine Kurve zeichnen zu können, setzen wir  $a = -3$ ,  $b = 1$ . Außerdem soll noch der Krümmungsradius im Punkt  $P_0(a, 0)$  berechnet werden. Mit Hilfe von Gleichung (3.33) erhält man  $\kappa = 2ba^4/a^6 = -2b/a^2$ . Hieraus folgt  $\varrho = -a^2/2b$ . Für  $a = -3$ ,  $b = 1$  erhält man  $y'_0 = \pm \sqrt{3}$ ,  $\varrho = -9/2 = -4,5$ . In Bild 3.13 ist die Kurve dargestellt.

- \* **Aufgabe 3.7:** Man untersuche dieselbe Gleichung  $F(x, y) = by^2 - x^2(x - a) = 0$  für die fünf verschiedenen Fälle  $b > 0, a > 0$ ;  $b > 0, a = 0$ ;  $b < 0, a > 0$ ;  $b < 0, a < 0$ ;  $b < 0, a = 0$ .

### 3.5. Ebene Kurven in Polarkoordinaten

Wir betrachten eine Ebene, in der ein orthogonales kartesisches  $x, y$ -Koordinatensystem mit dem Ursprung  $O$  gegeben ist. In diese Ebene legen wir ein *Polarkoordinatensystem*, das bestimmt wird durch einen *Pol* und durch einen *Strahl der Richtung 0*. Der Pol ist ein Punkt, der mit dem Ursprung  $O$  des  $x, y$ -Systems zusammenfallen soll. Der Strahl mit der Richtung  $0$  ist ein Strahl, der vom Pol ausgeht und der sich mit dem positiven Teil der  $x$ -Achse decken soll. Jeder Punkt  $P$  der Ebene wird dann durch zwei Koordinaten  $r$  und  $\varphi$  bestimmt. Dabei ist  $r$  der Abstand des Punktes  $P$  vom Pol  $O$  und  $\varphi$  der Winkel ( $\varphi$  im Bogenmaß), den der vom Pol  $O$  zum Punkt  $P$  führende Strahl mit dem Strahl der Richtung  $0$  bildet.

Der Übergang von den kartesischen Koordinaten  $x, y$  zu den **Polarkoordinaten**  $r, \varphi$  erfolgt durch die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Der Pol ist für das Polarkoordinatensystem ein singulärer Punkt, weil für ihn die Koordinate  $\varphi$  unbestimmt wird. Dies kommt auch in dem Verschwinden der Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r$$

an der Stelle  $r = 0$  zum Ausdruck.

Eine implizit gegebene Ebene Kurve mit der Gleichung  $F(x, y) = 0$  in kartesischen Koordinaten erhält in Polarkoordinaten die Gestalt

$$F(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = G(r, \varphi) = 0. \quad (3.35)$$

Kann man die Gleichung  $G(r, \varphi) = 0$  nach  $r$  auflösen, so erhält man die explizite Form der Kurvengleichung in Polarkoordinaten

$$r = r(\varphi). \quad (3.36)$$

Löst man die Gleichungen (3.34) nach  $r$  und  $\varphi$  auf, so erhält man die Transformationsformeln für den Übergang von Polarkoordinaten  $r, \varphi$  zu kartesischen Koordinaten  $x, y$ . Sie lauten

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \varphi &= \arctan \frac{y}{x}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

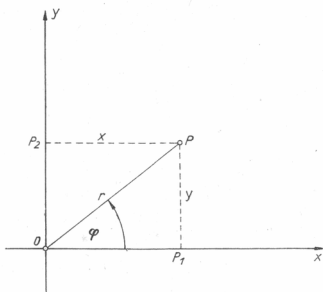


Bild 3.14. Beziehungen zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten

Um das Bogenelement  $ds$  einer durch  $r = r(\varphi)$  gegebenen Kurve in Polarkoordinaten zu erhalten, transformieren wir die Formel für das Bogenelement in kartesischen Koordinaten

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

mit Hilfe der Formeln (3.34). Durch Differentiation erhält man

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \left( \frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi + r \cos \varphi \right) \frac{d\varphi}{dx} = (r' \sin \varphi + r \cos \varphi) \left( \frac{d\varphi}{dx} \right) \\ &= \frac{r' \sin \varphi + r \cos \varphi}{\frac{dx}{d\varphi}}, \end{aligned}$$

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dr}{d\varphi} \cos \varphi - r \sin \varphi = r' \cos \varphi - r \sin \varphi.$$

Setzt man dies in die obige Formel für  $ds$  ein, so erhält man

$$ds = \sqrt{1 + \frac{(r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2}{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2}} (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi,$$

und daraus folgt nach kurzer Zwischenrechnung

$$ds = \sqrt{r'^2 + r^2} d\varphi. \quad (3.38)$$

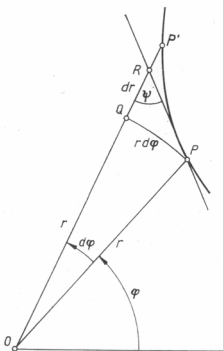


Bild 3.15. Zur Differentialgeometrie einer ebenen Kurve in Polarkoordinaten

Dieses Bogenelement in Polarkoordinaten hat auch eine geometrische Bedeutung. Aus Bild 3.15 liest man ab  $\overline{QR} = dr$ ,  $\overline{QP} = r d\varphi$ . Aus dem infinitesimalen rechtwinkligen Dreieck  $PQR$  – der rechte Winkel ist der Winkel  $PQR$  – folgt dann nach dem Satz des Pythagoras

$$\overline{PR} = \sqrt{(\overline{QP})^2 + (\overline{QR})^2} = \sqrt{(r d\varphi)^2 + (dr)^2} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi,$$

also haben wir

$$\overline{PR} = ds. \quad (3.39)$$

Ebenso folgt für den Winkel  $\psi = \angle PRQ$

$$\cot \psi = \frac{dr}{r d\varphi} = \frac{r'}{r}. \quad (3.40)$$

Um die Krümmung  $\kappa$  und den Krümmungsradius  $\varrho$  einer ebenen Kurve in Polarkoordinaten berechnen zu können, geht man von den Formeln für die Krümmung und den Krümmungsradius in kartesischen Koordinaten aus. Es war nach (3.25)

$$\kappa = \frac{y''}{(\sqrt{1 + y'^2})^3}.$$

Durch Differentiation der Gleichung  $y = r \sin \varphi$  findet man

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dx} = \left( r \cos \varphi + \frac{dr}{d\varphi} \sin \varphi \right) \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)^{-1}.$$

Mit  $dr/d\varphi = r'$  und  $dx/d\varphi = -r \sin \varphi + r' \cos \varphi$  erhält man

$$y' = \frac{r \cos \varphi + r' \sin \varphi}{-r \sin \varphi + r' \cos \varphi},$$

und hieraus folgt durch Differentiation nach  $x$

$$y'' = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r \cos \varphi + r' \sin \varphi}{-r \sin \varphi + r' \cos \varphi} \right) \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{r \cos \varphi + r' \sin \varphi}{-r \sin \varphi + r' \cos \varphi} \right) \left( \frac{dx}{d\varphi} \right)^{-1}.$$

Setzt man die Ausdrücke für  $y'$ ,  $y''$  in die Gleichung für  $\kappa$  ein, so erhält man nach etwas mühsamer Rechnung

$$\kappa = \frac{1}{\varrho} = \frac{r^2 - rr'' + 2r'^2}{(\sqrt{r^2 + r'^2})^3}. \quad (3.41)$$

### 3.6. Die Lemniskate als Beispiel einer ebenen Kurve in Polarkoordinaten

Gesucht ist der Ort aller Punkte  $X$  in der  $x, y$ -Ebene, für die das Produkt ihrer Abstände  $r_1, r_2$  von den zwei Punkten  $E_1(e, 0)$ ,  $E_2(-e, 0)$  den konstanten Wert  $r_1 r_2 = e^2$  hat. Aus Bild 3.16 liest man unmittelbar ab

$$r_1 = \sqrt{(x - e)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + e^2 - 2ex},$$

$$r_2 = \sqrt{(x + e)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + e^2 + 2ex}.$$

Für die Punkte des gesuchten Ortes ergibt sich dann

$$r_1 \cdot r_2 = \sqrt{(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4e^2 x^2} = e^2$$

bzw.

$$(x^2 + y^2 + e^2)^2 - 4e^2 x^2 = e^4.$$

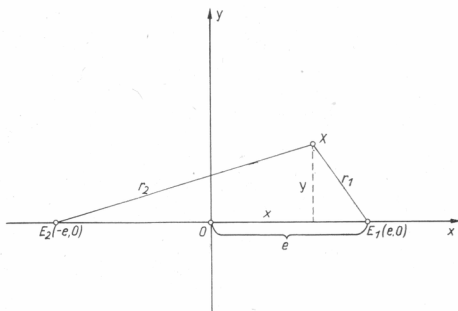


Bild 3.16. Zur Definition der (Bernoullischen) Lemniskate

Dies ist die Gleichung einer ebenen *algebraischen Kurve* in kartesischen Koordinaten. Sie heißt **Lemniskate** und ist eine Kurve vierter Ordnung, da die Glieder höchsten Grades in  $x$  und  $y$  die Gestalt  $x^4, y^4, x^2y^2$  haben. Die Exponentensumme ist vier. Es soll die Polargleichung der Lemniskate aufgestellt werden. Dazu benutzt man die Transformationsgleichungen (3.34), (3.37)  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $x^2 + y^2 = r^2$ . Man erhält durch Einsetzen in die Gleichung der Lemniskate in kartesischen Koordinaten

$$(r^2 + e^2)^2 - 4e^2 r^2 \cos^2 \varphi = e^4.$$

Hieraus folgt

$$r^2(r^2 + 2e^2(1 - 2\cos^2 \varphi)) = 0.$$

Wenn  $r \neq 0$  ist, ergibt sich

$$r^2 + 2e^2(1 - \cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi) = 0$$

oder

$$r^2 = 2e^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) = 2e^2 \cos 2\varphi.$$

Aus  $r^2 \geq 0$  folgt  $-\pi/4 \leq \varphi \leq \pi/4$ ,  $3\pi/4 \leq \varphi \leq 5\pi/4$ . Zieht man noch die Quadratwurzel, so findet man

$$r = e \sqrt{2 \cos 2\varphi}.$$

Dies ist die gesuchte Polargleichung der Lemniskate. Durch Differentiation ergibt sich

$$r' = \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{e\sqrt{2} \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Für den Winkel  $\psi$  zwischen Kurventangente und Radiusvektor  $r$  folgt mit (3.40)

$$\cot \psi = \frac{r'}{r} = -\frac{\sin 2\varphi}{\cos 2\varphi} = -\tan 2\varphi = \cot \left( \frac{\pi}{2} + 2\varphi \right), \quad \psi = \frac{\pi}{2} + 2\varphi.$$

Die Schenkel des Winkels  $\psi$  sind dabei der Radius  $r = OP$  und der auf der Kurventangente liegende Strahl, der von  $P$  ausgeht und nach der Seite orientiert ist, auf der Kurvenpunkte liegen, bei denen der zugehörige Winkel  $\varphi$  ein kleineres Maß als in  $P$  hat. An Hand einer Tabelle erkennt man die Abhängigkeit der Größen  $r(\varphi)$ ,  $\psi$  und  $\varphi$ .

$\varphi$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$3\frac{\pi}{4}$	$5\frac{\pi}{6}$	$\pi$	$7\frac{\pi}{6}$	$5\frac{\pi}{4}$	$7\frac{\pi}{4}$	$11\frac{\pi}{6}$	$2\pi$
$r$	$e\sqrt{2}$	$e$	0	0	$e$	$e\sqrt{2}$	$e$	0	0	$e$	$e\sqrt{2}$
$\psi$	$\frac{\pi}{2}$	$5\frac{\pi}{6}$	$\pi$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$5\frac{\pi}{6}$	$\pi$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$

Wegen  $r(\varphi + \pi) = r(\varphi)$  ist die Lemniskate zentralsymmetrisch zum Ursprung  $O$  und wegen  $r(2\pi - \varphi) = r(\varphi)$  bzw.  $r(\pi - \varphi) = r(\varphi)$  ist sie auch axialsymmetrisch bezüglich der  $x$ -Achse und der  $y$ -Achse. Für  $\varphi = \pi/4$ ,  $3\pi/4$ ,  $5\pi/4$ ,  $7\pi/4$  ist  $r(\varphi) = 0$ . Da  $\varphi = \pi/4$  und  $\varphi = 5\pi/4$  zum selben Kurvenzweig gehören und das gleiche für  $\varphi = 3\pi/4$  und  $\varphi = 7\pi/4$  der Fall ist, hat die Kurve im Ursprung  $O$  einen Doppelpunkt. Die Tangenten der beiden durch  $O$  gehenden Kurvenzweige bilden mit dem Strahl  $\varphi = 0$  die Winkel  $\pi/4$  und  $3\pi/4$ .

Es soll der Flächeninhalt  $F$  des von der Lemniskate umschlossenen Gebietes berechnet werden, in dem der Punkt  $E_1$  liegt (vgl. hierzu die Leibnizsche Sektorformel; Band 5, 7.1.). Dazu betrachtet man zwei infinitesimal benachbarte Radien  $OP = r(\varphi)$  und  $OP' = r(\varphi + d\varphi)$ . Sie bilden einen kleinen Sektor  $POP'$ , der durch den Kurvenbogen  $\widehat{PP'}$  und die beiden Radien  $OP$  und  $OP'$  begrenzt wird (siehe Bild 3.17). Man kann diesen Sektor mit guter Annäherung als ein Dreieck auffassen,



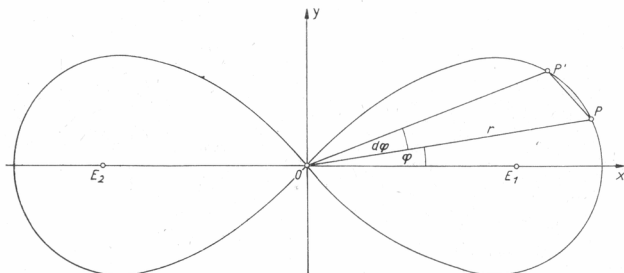


Bild 3.17. Bernoullische Lemniskate

und dies stimmt um so genauer, je kleiner der Winkel  $d\varphi$  ist, da dann die Sehne  $PP'$  sich dem Kurvenbogen  $\widehat{PP'}$  mehr und mehr annähert. Der Flächeninhalt des Dreiecks unterscheidet sich daher von dem Flächeninhalt  $dF$  des Sektors  $POP'$  um eine vernachlässigbare Größe. Es gilt

$$dF = \frac{1}{2} r(\varphi) r(\varphi + d\varphi) \sin(d\varphi).$$

Wegen der Kleinheit des Winkels  $d\varphi$  – er kann beliebig klein angenommen werden – kann man  $\sin(d\varphi)$  durch den Bogen  $d\varphi$  und  $r(\varphi + d\varphi)$  durch  $r(\varphi) + dr$  ersetzen. Vernachlässigt man noch das Glied  $dr d\varphi$  gegenüber dem linearen Glied in  $d\varphi$ , so erhält man schließlich

$$dF = \frac{1}{2} r^2 d\varphi.$$

Durch Integration von  $-\pi/4$  bis  $+\pi/4$  findet man den Flächeninhalt  $F$  des Gebietes, in dem  $E_1$  liegt

$$\begin{aligned} F &= \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{1}{2} r^2 d\varphi = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2e^2 \cos 2\varphi d\varphi = e^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{e^2}{2} \left[ \sin 2\varphi \right]_{-\pi/4}^{\pi/4} \\ &= \frac{e^2}{2} (1 + 1) = e^2. \end{aligned}$$

Für den Krümmungsradius erhält man aus

$$r = e\sqrt{2 \cos 2\varphi}, \quad r' = -e\sqrt{2} \sin 2\varphi / \sqrt{\cos 2\varphi}, \quad r'' = -e\sqrt{2} (1 + \cos^2 2\varphi) / (\sqrt{\cos 2\varphi})^3$$

nach einiger Rechnung

$$\varrho(\varphi) = \frac{e\sqrt{2}}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Im Fall  $\varphi = 0$  ergibt sich  $\varrho(0) = e\sqrt{2}/3$ , für  $\varphi = \pi/6$  erhält man  $\varrho(\pi/6) = 2e/3$ .

**Aufgabe 3.8:** Man diskutierte den Verlauf (Skizze) und berechne die Bogenlänge der folgenden in Polarkoordinaten gegebenen Kurven \*

a) der **archimedischen Spirale**  $r(\varphi) = a\varphi$ ,  $-\infty < \varphi < +\infty$ ;

b) der **hyperbolischen Spirale**  $r(\varphi) = \frac{a}{\varphi}$ ,  $-\infty < \varphi < +\infty$ ;

c) der **logarithmischen Spirale**  $r(\varphi) = e^{a\varphi}$ ,  $-\infty < \varphi < +\infty$ .

- \* **Aufgabe 3.9:** Man stelle die Polargleichung der Geraden auf, die den Strahl  $\varphi = 0$  in einem Punkt  $P_0$  mit dem Abstand  $r_0$  vom Pol schneidet und mit diesem Strahl den Winkel  $\alpha$  bildet.

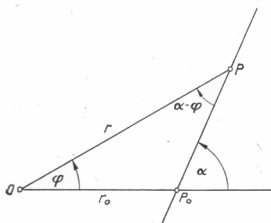


Bild 3.18. Zu Aufgabe 3.9

- \* **Aufgabe 3.10:** Man berechne die Bogenlänge und den Flächeninhalt eines Sektors mit dem Zentriwinkel  $\alpha$  eines in Polarkoordinaten gegebenen Kreises vom Radius  $a$ , der den Pol als Mittelpunkt besitzt. Welche bekannten Gleichungen ergeben sich?
- \* **Aufgabe 3.11:** Wie lautet die Polargleichung eines Kreises, der durch den Pol des Polarkoordinatensystems geht und dessen Mittelpunkt die Koordinaten  $r = r_0$ ,  $\varphi = \varphi_0$  hat?
- \* **Aufgabe 3.12:** Man bestimme den Verlauf der durch die Gleichung  $r(\varphi) = 2a \cdot \cos \varphi + 2a$  mit  $0 \leq \varphi \leq 4\pi$  gegebenen Kurve (**Kardioide**), berechne die Bogenlänge, den Krümmungsradius für  $\varphi = 0$  und den Flächeninhalt des von der Kurve umschlossenen Flächenstücks.
- \* **Aufgabe 3.13:** Der *Inversor von Peaucellier* besteht aus einem Gelenkrhombus  $APBP^*$  und zwei gleich langen Stäben  $OA$ ,  $OB$ . Die Stäbe  $OA$ ,  $OB$  sind drehbar im Ursprung  $O$  gelagert und mit dem Rhombus in  $A$  und  $B$  durch Drehgelenke verbunden. Man zeige: Es gilt stets

$$r \cdot r^* = a^2 - b^2$$

mit  $\overline{OA} = \overline{OB} = a$ ,  $\overline{AP} = \overline{BP} = \overline{BP^*} = \overline{AP^*} = b$ ,  $\overline{OP} = r$ ,  $\overline{OP^*} = r^*$ . Bewegt sich  $P$  auf einer Geraden, die nicht durch  $O$  geht, so  $P^*$  auf einem Kreis durch  $O$ .

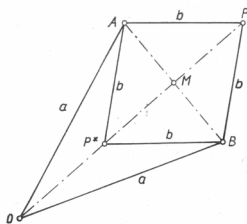


Bild 3.19. Der Inversor von Peaucellier

### 3.7. Evolute und Evolvente

Es sei  $y = f(x)$  die Gleichung einer ebenen Kurve  $c$  in der  $x, y$ -Ebene (vgl. Bild 3.20). Die Koordinaten  $\xi, \eta$  des Krümmungsmittelpunktes  $M(X)$  eines Kurvenpunktes  $X$  mit den Koordinaten  $x, y$  sind nach (3.27) gegeben durch

$$\begin{aligned}\xi &= x - y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \\ \eta &= y + \frac{1 + y'^2}{y''}.\end{aligned}\tag{3.42}$$

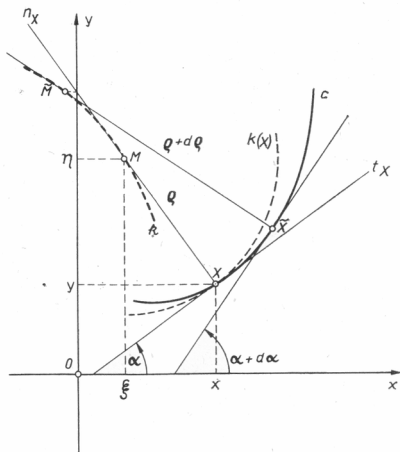


Bild 3.20. Evolute und Evolvente

Durchläuft der Punkt  $X$  die Kurve  $c$ , so beschreibt der zu  $X$  gehörige Krümmungsmittelpunkt  $M(X)$  eine ebene Kurve  $k$ . Die Kurve  $k$  heißt die Evolute der Kurve  $c$ . Berücksichtigt man, daß  $y, y', y''$  Funktionen von  $x$  sind, so sind wegen (3.42) auch  $\xi, \eta$  Funktionen von  $x$ , und die Gleichungen (3.42) stellen eine Parameterdarstellung für die **Evolute** dar. Ist die ursprüngliche Kurve  $c$  bereits in Parameterdarstellung gegeben, so verwendet man statt (3.42) die Gleichungen (3.12). Diese definieren ebenfalls eine Parameterdarstellung der Evolute.

Der zum Kurvenpunkt  $X$  auf  $c$  gehörige Krümmungsmittelpunkt  $M(X)$  liegt auf der Normalen  $n_X$  der Kurve  $c$  in  $X$ . Es läßt sich nun zeigen, daß die Normale  $n_X$  zugleich Tangente an die Evolute  $k(X)$  ist. Um dies einzusehen, be-

stimmen wir den Vektor  $\mathbf{m} = \overrightarrow{XM}$ . Seine Koordinaten erhält man aus der Differenz der Abszissen bzw. der Ordinaten der Punkte  $M(X)$  und  $X$

$$\mathbf{m} = \left( -y' \frac{1 + y'^2}{y''}, \frac{1 + y'^2}{y''} \right) = \frac{1 + y'^2}{y''} (-y', 1). \quad (3.43)$$

Der Vektor  $\mathbf{m}$  ist parallel zum Vektor  $\bar{\mathbf{r}} = (-y', 1)$ , denn er unterscheidet sich von  $\bar{\mathbf{r}}$  nur durch den Faktor  $(1 + y'^2)/y''$ . Der Vektor  $\bar{\mathbf{r}}$  ist demnach ebenfalls ein Richtungsvektor der Normalen  $n_x$ .

Um einen Tangentenvektor der Evolute zu erhalten, differenziert man die Gleichungen (3.42) nach dem Parameter  $x$ . Man erhält

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= 1 - y'' \cdot \frac{1 + y'^2}{y''} - y' \cdot \frac{2y'y''y'' - (1 + y'^2)y'''}{y''^2} \\ &= -y' \cdot \frac{3y'y''^2 - (1 + y'^2)y'''}{y''^2}, \\ \dot{\eta} &= y' + \frac{2y'y''^2 - (1 + y'^2)y'''}{y''^2} = \frac{3y'y''^2 - (1 + y'^2)y'''}{y''^2}. \end{aligned}$$

Die Größen  $\dot{\xi}, \dot{\eta}$  haben den gemeinsamen Faktor  $[3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''']/y''^2$ . Daher ist der Tangentenvektor  $(\dot{\xi}, \dot{\eta})$  parallel zum Vektor  $(-y', 1)$ , denn die beiden Vektoren unterscheiden sich gerade um den oben erwähnten skalaren Faktor.

Die Normale  $n_x$  hat demnach im Punkt  $X$  der Kurve  $c$  dieselbe Richtung wie die Tangente im Punkt  $M(X)$  an die Evolute  $k$ . Da  $n_x$  aber durch den Punkt  $M(X)$  hindurchgeht, ist die Normale  $n_x$  zugleich Tangente an die Evolute  $k$  im Punkt  $M(X)$ . Dies trifft nun für alle Normalen  $n_x$  der Kurve  $c$  zu. Man kann daher auch sagen, daß die Normalen  $n_x$  der Kurve  $c$  die Evolute  $k$  einhüllen bzw. daß die Evolute  $k$  **Hüllkurve** der Normalen  $n_x$  der Kurve  $c$  ist. Die Kurve  $c$ , deren Evolute die Kurve  $k$  ist, wird auch als **Evolute** der Kurve  $k$  bezeichnet.

Mit Hilfe des Krümmungsradius  $\varrho$  läßt sich nun eine zweite merkwürdige geometrische Beziehung zwischen Evolute und Evolute finden. Es sei  $k$  die Evolute der Kurve  $c$  mit der Gleichung  $y = f(x)$ . Ferner seien  $X$  und  $X^*$  zwei benachbarte Punkte auf  $c$ ,  $M$  und  $M^*$  die zugehörigen Krümmungsmittelpunkte auf  $k$ . Bezeichnen wir die zu den Punkten  $X$  und  $X^*$  gehörenden Krümmungsradien der Kurve  $c$  mit  $\varrho = \overline{MX}$  und  $\varrho^* = \overline{M^*X^*}$  und setzen  $\varrho^* = \varrho + \Delta\varrho$ , so geht die Größe  $\Delta\varrho$ , wenn  $X^*$  auf  $c$  gegen  $X$  rückt, in  $d\varrho$  über und  $d\varrho$  ist bis auf das Vorzeichen mit dem Bogenelement  $d\bar{s}$  der Evolute  $k$  identisch. Das Bogenelement  $d\bar{s} = \sqrt{\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2} dx$  der Evolute  $k$  kann man durch  $y', y''$  und  $y'''$  ausdrücken. Es ist

$$\dot{\xi}^2 + \dot{\eta}^2 = \frac{1}{y''^4} [3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''']^2 (y'^2 + 1),$$

somit also

$$d\bar{s} = \frac{1}{y''^2} |3y'y''^2 - (1 + y'^2)y'''| \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (3.44)$$

Für  $d\varrho$  erhält man durch Differentiation von  $\varrho = (1 + y'^2)^{3/2}/y''$

$$\frac{d\varrho}{dx} = \frac{\sqrt{1 + y'^2} [3y'y''^2 - (1 + y'^2)y''']}{y''^2}. \quad (3.45)$$

Aus (3.44) und (3.45) folgt

$$d\varrho = \pm d\bar{s}. \quad (3.46)$$

Das Pluszeichen gilt, wenn  $d\varrho$  positiv, das Minuszeichen, wenn  $d\varrho$  negativ ist. Das Vorzeichen von  $d\varrho$  stimmt aber wegen (3.45) mit dem Vorzeichen des Ausdrucks  $3y'y''^2 - (1 + y'^2)y'''$  überein. Aus Gleichung (3.46) folgt durch Integration

$$\varrho = \pm \bar{s} + C. \quad (3.47)$$

Wählt man auf  $c$  einen Punkt  $X_0$  und ist  $M_0$  der zugehörige Krümmungsmittelpunkt auf der Evolute  $k$  und zählt man die Bogenlänge  $\bar{s}$  der Evolute von  $M_0$  aus im Sinne wachsender Werte von  $\varrho$ , so ist die Bogenlänge  $\bar{s}_0$  im Punkt  $M_0$  gleich null. Der zugehörige Krümmungsradius für den Punkt  $X_0$  sei  $\varrho_0$ . Dann ergibt sich für die Konstante  $C$  aus (3.47)  $C = \varrho_0$ . Ist  $X$  ein Punkt auf  $c$ , für den  $\varrho > \varrho_0$  gilt, so folgt aus (3.47) die Gleichung

$$\varrho - \varrho_0 = \bar{s}. \quad (3.48)$$

Das Minuszeichen vor  $\bar{s}$  fällt hier weg, da  $\bar{s} > 0$  und  $\varrho > \varrho_0$  ist. Damit ergibt sich der

**Satz 3.1:** Die Differenz zweier Krümmungsradien der Endpunkte eines Kurvenbogens einer ebenen Kurve  $c$  ist gleich der Länge des Evolutenbogens zwischen den zugehörigen Krümmungsmittelpunkten.<sup>1)</sup> S.3.1

**Satz 3.2:** Die Krümmungsradien der Evolute und Evolvente verhalten sich wie die zugehörigen Bogenelemente. S.3.2

*Beweis:* Aus Gleichung (3.48) folgt durch Differentiation  $d\varrho = d\bar{s}$ . Andererseits gilt für das Bogenelement  $ds$  der Evolvente  $c$  auf Grund von (3.5) und wegen  $\kappa = 1/\varrho$

$$ds = \varrho d\alpha. \quad (3.49)$$

Für den Krümmungsradius  $\bar{\varrho}$  der Evolute  $k$  erhält man analog, da die Tangenten in den benachbarten Punkten  $M$  und  $M^*$  der Evolute ebenfalls den Winkel  $d\alpha$  bilden,

$$d\bar{s} = \bar{\varrho} d\alpha. \quad (3.50)$$

Hieraus folgt durch Division die Behauptung

$$ds : d\bar{s} = \varrho : \bar{\varrho}. \quad (3.51)$$

Die Evoluten und insbesondere die Evolventen spielen eine wichtige Rolle in der Verzahnungstheorie, wie die Bezeichnung *Evolventenverzahnung* zeigt.

*Aufgabe 3.14:* Man bestimme die Evolute der Parabel  $y^2 = 2px$  und gebe die Koordinaten der Schnittpunkte beider Kurven an. \*

*Aufgabe 3.15:* Man bestimme eine Parameterdarstellung der durch den Punkt  $A(a, 0)$  gehenden Evolvente des Kreises  $\xi^2 + \eta^2 = a^2$  und gebe die Bogenlänge und den Krümmungsradius an (Skizze). \*

<sup>1)</sup> Spannt man längs des Evolutenbogens  $MM_0$  einen Faden straff und wickelt ihn unter Festhalten des einen Endes in  $M_0$  von der Evolute ab, so beschreibt der andere Endpunkt des straff gehaltenen Fadens eine Evolvente. Da  $M$  und  $M_0$  beliebig wählbar sind, gibt es zu einer Evolute unendlich viele Evolventen.

### 3.8. Hüllkurven

Wir betrachten eine Funktion  $F$  von drei Veränderlichen  $x, y, z$ .<sup>1)</sup> Durch die Gleichung  $F(x, y, z) = 0$  ist in der  $x, y$ -Ebene eine Schar von ebenen Kurven gegeben. Setzt man nämlich  $z = C$ , wo  $C$  eine Konstante sein soll, so stellt die Gleichung

$$F(x, y, C) = 0 \quad (3.52)$$

eine ebene Kurve  $c$  in der  $x, y$ -Ebene dar. Wir setzen voraus, daß  $F$  nach  $x, y$  und  $z$  differenzierbar ist. Wir nehmen an, daß die Konstante  $C$  die Bedingung  $z_1 \leq C \leq z_2$  erfüllt. Setzen wir für die Konstante  $C$  eine andere Konstante  $\bar{C} = C + \Delta C$  ein, so ist durch

$$F(x, y, C + \Delta C) = 0 \quad (3.53)$$

eine zweite ebene Kurve  $\bar{c}$  gegeben, die sich wenig von  $c$  unterscheidet, falls  $\Delta C$  hinreichend klein ist (vgl. [2], S. 508; [16], S. 63). Nimmt man an, daß sich die Konstante  $C$  stetig verändert, so stellen die zugehörigen Gleichungen (3.52) die Gleichungen einer ganzen Schar von Kurven dar. Wir wollen voraussetzen, daß diese **Kurvenschar** eine **Hüllkurve** besitzt (siehe Bild 3.21). Das heißt, jede Kurve der Schar soll diese Hüllkurve  $h$  in einem Punkt berühren.

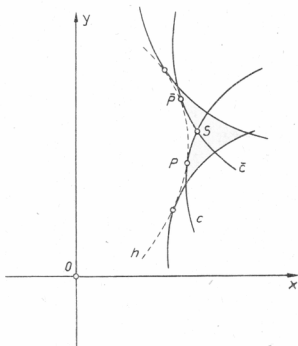


Bild 3.21. Kurvenschar mit Hüllkurve

Der Berührungspunkt  $P$  der Kurve  $c$  der Schar mit der Hüllkurve  $h$  kann aus dem Schnittpunkt  $S$  der Kurve  $c$  mit einer Nachbarkurve  $\bar{c}$  erhalten werden, wenn man den Grenzübergang  $\Delta C \rightarrow 0$  durchführt. Denn mit  $\Delta C$  gegen null geht die Gleichung (3.53) der Kurve  $\bar{c}$  in die Gleichung (3.52) der Kurve  $c$  über, und dabei rückt der Punkt  $S$  entlang der Kurve  $c$  in den Punkt  $P$  hinein. Betrachten wir das Gleichungssystem

$$F(x, y, C) = 0, \quad F(x, y, C + \Delta C) = 0, \quad (3.54)$$

so sind die Koordinaten des Punktes  $S$  eine Lösung des Systems (3.54).

<sup>1)</sup>  $F$  sei stetig und besitze stetige partielle Ableitungen bis zur 2. Ordnung nach  $x, y, z$ .

Wir ändern das System (3.54) ab, indem wir an Stelle der zweiten Gleichung die durch Differenzbildung entstehende Gleichung verwenden. Dann geht (3.54) über in

$$\begin{aligned} F(x, y, C) &= 0, \\ F(x, y, C + \Delta C) - F(x, y, C) &= 0. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Auch für das System (3.55) sind die Koordinaten von  $S$  eine Lösung. Daran ändert sich auch nichts, wenn man die zweite Gleichung mit dem Faktor  $1/\Delta C$  multipliziert. Das ergibt

$$\begin{aligned} F(x, y, C) &= 0, \\ \frac{1}{\Delta C} (F(x, y, C + \Delta C) - F(x, y, C)) &= 0. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Führt man jetzt den Grenzübergang  $\Delta C \rightarrow 0$  durch, so geht (3.56) über in

$$\begin{aligned} F(x, y, C) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial C} F(x, y, C) &= 0. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Da die Gleichungen (3.56) durch die von  $C$  und  $\Delta C$  abhängigen Koordinaten des Punktes  $S$  erfüllt werden, dieser aber nach dem Grenzübergang  $\Delta C \rightarrow 0$  in den Punkt  $P$  übergegangen ist, wird das aus (3.56) durch  $\Delta C \rightarrow 0$  entstandene Gleichungssystem (3.57) durch die Koordinaten von  $P$  erfüllt.  $P$  ist aber ein Punkt der Hüllkurve. Ist

$$x = x(C), \quad y = y(C)$$

eine Parameterdarstellung der Hüllkurve  $h$  der Schar (3.52), so gilt daher

$$F(x(C), y(C), C) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial C} F(x(C), y(C), C) = 0,$$

bzw. wenn die Kurvenschar (3.52) eine Hüllkurve besitzt, so genügt deren Parameterdarstellung  $x = x(C)$ ,  $y = y(C)$  dem System (3.57). Falls die benachbarten Kurven  $c$  und  $\bar{c}$  keinen reellen Schnittpunkt  $S$  haben, andererseits  $c$  die Hüllkurve in  $P$  berührt, so besitzen  $c$  und  $\bar{c}$  zwei konjugiert komplexe Schnittpunkte  $S_1, S_2$ , die beim Grenzübergang  $\Delta C \rightarrow 0$  im Punkt  $P$  zusammenrücken. An Stelle von  $S$  kann dann beispielsweise der Punkt  $S_1$  gewählt werden.

Haben die Kurven der Schar (3.52) singuläre Punkte (vgl. S. 54) und ist der Ort dieser singulären Punkte eine Kurve  $c_s$  mit der Parameterdarstellung

$$x = x_s(C), \quad y = y_s(C),$$

so genügt diese Parameterdarstellung ebenfalls den Gleichungen (3.57).

*Beweis:* Da jeder Punkt von  $c_s$  ein singulärer Punkt einer Kurve  $c$  der Schar ist, gilt  $F(x_s(C), y_s(C), C) = 0$ ,  $F_x(x_s(C), y_s(C), C) = 0$ ,  $F_y(x_s(C), y_s(C), C) = 0$  für jedes  $C$  mit  $z_1 \leq C \leq z_2$ . Differenziert man die erste dieser drei Gleichungen nach  $C$ , so folgt

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dC} &= F_x(x_s(C), y_s(C), C) \frac{dx_s}{dC} + F_y(x_s(C), y_s(C), C) \frac{dy_s}{dC} \\ &\quad + F_C(x_s(C), y_s(C), C) = 0, \end{aligned}$$

und hieraus ergibt sich, wenn man die vorangehenden Gleichungen beachtet,

$$F_C(x_s(C), y_s(C), C) = 0.$$

Löst man die Gleichungen (3.57) nach  $x$  und  $y$  auf, es werde angenommen, daß dies möglich ist, so erhält man zwei Gleichungen der Gestalt

$$\begin{aligned} x &= x(C), \\ y &= y(C), \quad z_1 \leq C \leq z_2. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Die Gleichungen (3.58) sind entweder eine Parameterdarstellung der Hüllkurve  $h$  der Kurvenschar (3.52) oder eine Parameterdarstellung einer Kurve  $c_s$ , die der Ort von singulären Punkten von Kurven der Schar ist. Das letztere kann jedoch nicht eintreten, wenn die Kurven der Schar keine singulären Punkte besitzen.

Gelingt es, aus den Gleichungen (3.57) die Größe  $C$  zu eliminieren, so erhält man als Ergebnis eine Gleichung, in der nur noch  $x$  und  $y$  vorkommen. Sie sei gegeben durch

$$G(x, y) = 0. \quad (3.59)$$

Die Gleichung (3.59) wird von der Parameterdarstellung (3.58) erfüllt. Falls durch (3.59) keine Kurve gegeben ist, so besitzt die Kurvenschar (3.52) keine Hüllkurve. Ist jedoch (3.59) die Gleichung einer Kurve, so heißt diese Kurve **Diskriminantenkurve** der Schar (3.52). Man muß im Einzelfall untersuchen, ob die Diskriminantenkurve eine Hüllkurve der Schar oder ob sie der geometrische Ort von singulären Punkten der Schar (3.52) ist. Schließlich kann die Diskriminantenkurve auch eine oder mehrere spezielle Kurven der Schar enthalten, was ebenfalls überprüft werden muß (vgl. [2], S. 508–516; [9], Bd. 2, S. 525–537).

Als Beispiel werde folgende Aufgabe betrachtet: Eine Stange der Länge  $l$  gleite mit ihren Endpunkten auf zwei zueinander senkrechten geradlinigen Schienen. Es ist die Kurve zu bestimmen, die von dieser Stange eingehüllt wird.

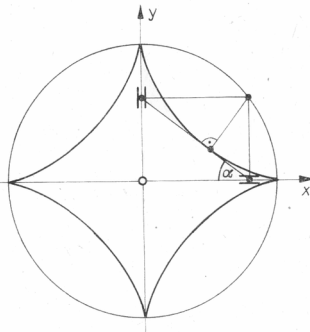


Bild 3.22. Astroide



Zur Lösung wird ein orthogonales kartesisches  $x, y$ -System eingeführt, dessen Achsen mit den Schienen übereinstimmen (siehe Bild 3.22). Der Winkel der Stange gegen die negative  $x$ -Achse sei  $\alpha$ . Faßt man die Stange als eine Gerade auf, so lautet ihre Gleichung (vgl. z.B. [9], Bd. 1, S. 403)

$$\frac{x}{l \cos \alpha} + \frac{y}{l \sin \alpha} = 1.$$

Hieraus folgt  $x \sin \alpha + y \cos \alpha = l \cos \alpha \sin \alpha$ . Man setzt nun  $F(x, y, \alpha) = x \sin \alpha + y \cos \alpha - l \cos \alpha \sin \alpha = 0$  und bildet  $\partial F / \partial \alpha = x \cos \alpha - y \sin \alpha - l(-\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 0$ . Um eine Parameterdarstellung der gesuchten Hüllkurve zu erhalten, löst man beide Gleichungen nach  $x$  und  $y$  auf. Multiplikation der ersten Gleichung mit  $\sin \alpha$ , der zweiten mit  $\cos \alpha$  und anschließende Addition beider führt zu  $x = l(\cos \alpha \sin^2 \alpha + \cos^3 \alpha - \cos \alpha \sin^2 \alpha) = l \cos^3 \alpha$ . Desgleichen führt die Multiplikation der ersten Gleichung mit  $\cos \alpha$  und der zweiten mit  $-\sin \alpha$  nach Addition beider Gleichungen zu  $y = l(\cos^2 \alpha \sin \alpha + \sin^3 \alpha - \cos^2 \alpha \sin \alpha) = l \sin^3 \alpha$ . Durch

$$x = l \cos^3 \alpha, \quad y = l \sin^3 \alpha \quad (3.60)$$

hat man die Parameterdarstellung einer Kurve gefunden, die die Gleichungen  $F(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) = 0$  und  $F_\alpha(x(\alpha), y(\alpha), \alpha) = 0$  erfüllt. Da die Kurven der betrachteten Schar Geraden sind, haben sie keine singulären Punkte. Die gefundene Kurve ist daher die gesuchte Hüllkurve. Eliminiert man aus den beiden Gleichungen (3.60) noch  $\alpha$ , so findet man wegen  $\cos \alpha = (x/l)^{1/3}$ ,  $\sin \alpha = (y/l)^{1/3}$  durch Quadrieren und Addieren die Gleichung  $(x/l)^{2/3} + (y/l)^{2/3} = 1$ , woraus schließlich

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$$

folgt. Die gefundene Kurve heißt *Astroide* oder *Sternkurve*. Sie besitzt in den Punkten  $A_1(l, 0)$ ,  $A_2(0, l)$ ,  $A_3(-l, 0)$ ,  $A_4(0, -l)$  Spitzen. Für  $\alpha = \pi/4$  ergibt sich  $x = l(1/\sqrt{2})^3$ ,  $y = l(1/\sqrt{2})^3$ . Der zugehörige Krümmungsradius hat wegen

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -3 \cdot l \cdot \cos^2 \alpha \sin \alpha, & \dot{y} &= 3 \cdot l \cdot \sin^2 \alpha \cos \alpha, \\ \ddot{x} &= 6 \cdot l \cdot \cos \alpha \sin^2 \alpha - 3 \cdot l \cdot \cos^3 \alpha, & \ddot{y} &= 6 \cdot l \cdot \sin \alpha \cos^2 \alpha - 3 \cdot l \cdot \sin^3 \alpha \end{aligned}$$

den Wert  $\varrho(\alpha) = -3 \cdot l \sin \alpha \cos \alpha$ , bzw.  $\varrho(\pi/4) = -3/2 \cdot l$ .

**Aufgabe 3.16:** Ein quaderförmiger Hohlraum mit quadratischer Innengrundfläche (Seitenlänge  $a$ ) und vier rechteckigen Seitenflächen der Breite  $a$  und der Höhe  $H$  ist mit dem Außenraum durch eine in einer Seitenfläche liegende rechteckige Öffnung der Breite  $b < a$  und der Höhe  $h < b$  verbunden. Die untere Kante der Breite  $b$  dieser Öffnung befinde sich in gleicher Höhe wie die Grundflächen des Hohlraums und des Außenraumes. Wie groß muß  $h$  mindestens sein, damit ein Brett der Breite  $b$  und der Länge  $l$  mit  $a < l < H$  (die Brettstärke werde vernachlässigt) durch die Öffnung unverkantet und ohne Verbiegung eingeführt werden kann (vgl. Bild 3.23 auf S. 70)? \*

**Aufgabe 3.17:** Man zeige, daß die Astroide bei der Innenabrollung eines Kreises vom Radius  $r$  auf einem festen Kreis vom Radius  $R$  als Bahnkurve eines beliebigen Punktes der Peripherie des Rollkreises entsteht, falls die Radien  $R$  und  $r$  geeignet gewählt werden. \*

**Aufgabe 3.18:** Man bestimme eine Parameterdarstellung für die Hüllkurve der Normalen einer ebenen Kurve mit der Gleichung  $y = f(x)$ . \*

**Aufgabe 3.19:** Man bestimme die Hüllkurve aller durch den Ursprung der  $x, y$ -Ebene gehenden Kreise, deren Mittelpunkte die Koordinaten  $x_0 = d \cos^2 \alpha$ ,  $y_0 = d \cdot \cos \alpha \sin \alpha$ ,  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ , haben. \*

Bei einer zwangsläufigen, ebenen Bewegung bewegt sich ein Körper relativ zu einem festen Körper derart, daß jeder Punkt des bewegten Körpers eine bestimmte ebene Bahnkurve durchläuft. Die Ebenen dieser Bahnkurven sind entweder gleich oder zueinander parallel. Um die Gesetze einer

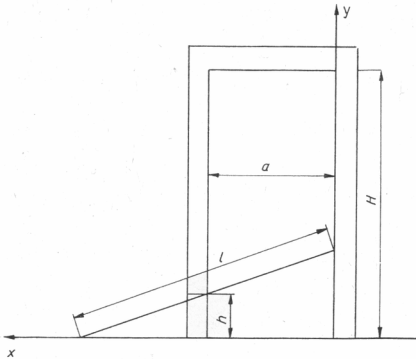


Bild 3.23. Zu Aufgabe 3.16

solchen Bewegung zu studieren, genügt es, eine Ebene (**Gangebene**) zu betrachten, die relativ zu einer festen Ebene (**Rastebene**) eine zwangsläufige ebene Bewegung ausführt. Dabei sollen beide Ebenen miteinander zusammenfallen.

In jedem Zeitpunkt einer solchen Bewegung gehen die Normalen, die man in den die Bahnkurven beschreibenden Punkten der Gangebene auf den jeweiligen Bahnkurven errichten kann, durch einen Punkt. Dieser Punkt heißt das **Momentanzentrum** der Bewegung in dem betrachteten Zeitpunkt.

Um dies einzusehen, geht man von drei verschiedenen Punkten  $X, Y, Z$  der Gangebene aus. Ihre Bahnkurven haben die Parameterdarstellungen  $\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)$ , wobei  $t$  die Zeit bedeuten möge. Da die gegenseitigen Abstände der drei Punkte während der Bewegung konstant bleiben, folgt

$$|\mathbf{y}(t) - \mathbf{z}(t)| = a, \quad |\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)| = b, \quad |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| = c,$$

woraus sich  $(\mathbf{y} - \mathbf{z})^2 = a^2$ ,  $(\mathbf{z} - \mathbf{x})^2 = b^2$ ,  $(\mathbf{x} - \mathbf{y})^2 = c^2$  und nach Differentiation

$$(\mathbf{y} - \mathbf{z}) \cdot (\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{z}}) = 0, \quad (\mathbf{z} - \mathbf{x}) \cdot (\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{x}}) = 0, \quad (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot (\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}) = 0$$

ergibt. Die Vektoren  $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z} - \mathbf{x}$  und  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  sind gewiß nicht null. Falls dies auch für  $\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{z}}$ ,  $\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{x}}$  und  $\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}$  zutrifft, steht  $\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{z}}$  auf  $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ ,  $\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{x}}$  auf  $\mathbf{z} - \mathbf{x}$  und  $\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}$  auf  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  senkrecht. Die Vektoren  $\mathbf{y} - \mathbf{z}$ ,  $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ ,  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$  bilden die Seiten eines Dreiecks mit den Eckpunkten  $X, Y, Z$ . Zeichnet man in  $X$  eine Senkrechte zum Vektor  $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ , in  $Y$  eine Senkrechte zu  $\mathbf{y} - \mathbf{z}$  und in  $Z$  eine solche zu  $\mathbf{z} - \mathbf{x}$ , so schneiden sich diese Senkrechten in den Eckpunkten  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$  eines zweiten Dreiecks, das zum Dreieck  $X, Y, Z$  gleichsinnig ähnlich und um 90 Grad gegenüber diesem Dreieck gedreht ist. Die Seiten des Dreiecks  $\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}$  werden durch die Vektoren  $\dot{\mathbf{y}} - \dot{\mathbf{z}}$ ,  $\dot{\mathbf{z}} - \dot{\mathbf{x}}$ ,  $\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}}$  gebildet, wenn man den Abbildungsmaßstab für die Geschwindigkeiten geeignet wählt. Zeichnet man einen beliebigen Punkt  $\dot{P}$  der Ebene beider Dreiecke aus, so entsprechen

den gerichteten Strecken  $\vec{P\dot{X}}, \vec{P\dot{Y}}, \vec{P\dot{Z}}$  die drei Ableitungsvektoren  $\dot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{z}}$ . Zieht man durch  $X$  eine Parallele  $t_x$  zur Geraden  $\vec{P\dot{X}}$ , durch  $Y$  eine Parallele  $t_y$  zu  $\vec{P\dot{Y}}$  und durch  $Z$  eine Parallele  $t_z$  zu  $\vec{P\dot{Z}}$ , und errichtet in  $X, Y, Z$  Senkrechte  $n_x, n_y, n_z$  auf den jeweiligen Parallelen, so schneiden sich diese in einem Punkt  $P$  der Ebene. Dies folgt aus der Ähnlichkeit der beiden Dreiecke. Den Geraden  $\vec{P\dot{X}}, \vec{P\dot{Y}}, \vec{P\dot{Z}}$  entsprechen bei dieser Ähnlichkeit die Lote  $n_x, n_y, n_z$ , und da die ersten drei Geraden durch einen Punkt gehen, müssen sich auch die ihnen entsprechenden Geraden  $n_x, n_y, n_z$  in einem

Punkt schneiden. Die drei Geraden  $n_x, n_y, n_z$  kann man als *Bahnnormalen* der Bahnen der Punkte  $X, Y, Z$  zum Zeitpunkt  $t$  ansehen. Sie gehen wie behauptet durch einen Punkt  $P$ . Falls  $\dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$  ist, haben  $X$  und  $Y$  zum Zeitpunkt  $t$  gleiche Geschwindigkeitsvektoren. Wegen der Starrheit des Dreiecks  $X, Y, Z$  ist dann  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{y}} = \dot{\mathbf{z}}$ , und die Bahnnormalen in den Punkten  $X, Y, Z$  sind zueinander parallel. Sie schneiden sich in diesem Fall in einem Fernpunkt. Rechnet man den Punkt  $P$  zur Gangebene, so ist seine Geschwindigkeit zum Zeitpunkt  $t$  gleich null. Die Gangebene führt in diesem Augenblick eine momentane Drehung um den Punkt  $P$  aus.

Betrachtet man alle Momentanzentren als Punkte der Rastebene, so erfüllen sie eine Kurve, die als *Rastpolbahn* bezeichnet wird. Sieht man dagegen die Momentanzentren als Punkte der Gangebene an, so bilden sie in dieser eine zweite Kurve, die man *Gangpolbahn* nennt. Bei einer zwangsläufigen ebenen Bewegung rollt nun die Gangpolbahn auf der Rastpolbahn ab.

Es seien zwei Zahnräder mit parallelen Achsen (Stirnräder) gegeben. Stehen die Zähne beider Räder miteinander im Eingriff, so hat die Drehung des einen Zahnrades eine entsprechende Drehung des anderen zur Folge. Die Bewegung des einen Zahnrades relativ zum anderen ist eine zwangsläufige ebene Bewegung. Die Polbahnen sind zwei Kreise  $k_1, k_2$  mit den Mittelpunkten  $O_1, O_2$  und den Radien  $r_1, r_2$  (vgl. Bild 3.24). Sie werden auch als *Wälzkreise* bezeichnet. Es ist  $r_1 + r_2 = a$ , wo  $a$

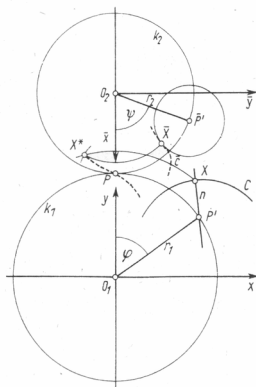


Bild 3.24

den Achsabstand bedeutet. Wir führen zwei ortsfeste kartesische Koordinatensysteme  $O_1(x, y)$  und  $O_2(\bar{x}, \bar{y})$  ein (Bild 3.24). Der Punkt  $P$ , wo sich beide um ihre Achsen  $O_1, O_2$  drehenden Räder ständig berühren, ist der Pol der relativen Bewegung. Das heißt, in  $P$  liegt der jeweilige Momentanpol der Bewegung des einen Rades relativ zum anderen, falls die Drehung beider Räder um  $O_1$  und  $O_2$  so erfolgt, daß der Wälzkreis des einen Rades auf dem Wälzkreis des anderen abrollt. Ist  $P'$  ein Punkt des Wälzkreises  $k_1$ , der mit dem Punkt  $P'$  des Wälzkreises  $k_2$  im Verlauf der Bewegung in  $P$  zur Deckung gelangt, so werde der Winkel  $\angle PO_1P'$  mit  $\varphi$ , der Winkel  $\angle PO_2P'$  mit  $\psi$  bezeichnet. Es ist  $r_1\varphi = r_2\psi$ . Für das erste Rad sei die Flanke  $c$  eines Zahnes durch die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(\varphi) = x(\varphi) \mathbf{i} + y(\varphi) \mathbf{j}$$

gegeben. Es sei  $X$  ein beliebiger Punkt von  $c$ ,  $P'$  der Punkt des Wälzkreises  $k_1$ , für den  $\angle PO_1P' = \varphi$  ist. Dann soll die Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(\varphi)$  die Eigenschaft haben, daß die Gerade  $XP'$  für jeden

Winkel  $\varphi$  Normale der Zahnflanke  $c$  im Punkt  $X$  ist. Damit  $\mathbf{x}(\varphi)$  diese Eigenschaft besitzt, müssen ihre Koordinaten  $x(\varphi)$ ,  $y(\varphi)$  die Bedingung

$$x\dot{x} + y\dot{y} = r_1(\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi)$$

erfüllen.

Es soll nun das Gegenprofil  $\bar{c}$  zu der gegebenen Zahnflanke  $c$  ermittelt werden. Das heißt, es soll die Flanke für den Zahn des zweiten Zahnrades bestimmt werden, die mit der gegebenen Flanke des ersten Rades im Eingriff steht. Während dieses Vorgangs berühren sich beide Flanken ständig in einem Punkt. Nach dem Grundgesetz der Verzahnung (Vgl. [17], S. 236) muß die gemeinsame Normale beider Zahnflanken im Berührungspunkt (**Eingriffspunkt**) stets durch den Pol der relativen Bewegung gehen. Nach Reuleaux ([18], S. 293) kann man den zum Punkt  $X$  gehörigen Punkt  $\bar{X}$  des Gegenprofils so finden, daß man die Strecke  $P'X$  um den Winkel  $\varphi$  um  $O_1$  dreht. Dann kommt  $P'$  mit  $P$  und  $X$  mit einem Punkt  $X^*$  zur Deckung. Darauf wird  $PX^*$  um  $O_2$  um den Winkel  $\psi$  gedreht, wobei  $P$  nach  $\bar{P}'$  und  $X^*$  nach  $\bar{X}$  gelangt. Die Koordinaten  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  von  $\bar{X}$  ergeben sich zu

$$\begin{aligned}\bar{x}(\varphi) &= (a - x \sin \varphi - y \cos \varphi) \cos(k\varphi) - (x \cos \varphi - y \sin \varphi) \sin(k\varphi) \\ \bar{y}(\varphi) &= (a - x \sin \varphi - y \cos \varphi) \sin(k\varphi) + (x \cos \varphi - y \sin \varphi) \cos(k\varphi)\end{aligned} \quad \text{mit } k = \frac{r_1}{r_2}.$$

Beide Gleichungen sind eine Parameterdarstellung des Gegenprofils  $\bar{c}$ . Wir fassen nun den Kreis mit dem Mittelpunkt  $\bar{P}'$  und dem Radius  $r = \overline{XP'} = \overline{XP'}$  ins Auge. Bei veränderlichem Winkel  $\varphi$  durchläuft dieser Kreis eine Kreisschar. Es soll gezeigt werden, daß das Gegenprofil  $\bar{c}$  Hüllkurve dieser Kreisschar ist. Die Kreisschar ist gegeben durch die Gleichung

$$(\bar{x} - r_2 \cos(k\varphi))^2 + (\bar{y} - r_2 \sin(k\varphi))^2 = (r_1 \cos \varphi - y(\varphi))^2 + (r_1 \sin \varphi - x(\varphi))^2,$$

wobei  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  als laufende Koordinaten,  $\varphi$  als Scharparameter betrachtet werden. Hieraus folgt:

$$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 - 2r_2 \cos(k\varphi) \bar{x} - 2r_2 \sin(k\varphi) \bar{y} + (r_2)^2 = (r_1)^2 + x^2 + y^2 - 2r_1 y \cos \varphi - 2r_1 x \sin \varphi.$$

Differenziert man diese Gleichung nach  $\varphi$ , so erhält man

$$2r_2 k \sin(k\varphi) \bar{x} - 2r_2 k \cos(k\varphi) \bar{y} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} - 2r_1 \dot{y} \cos \varphi - 2r_1 \dot{x} \sin \varphi + 2r_1 y \sin \varphi - 2r_1 x \cos \varphi.$$

Wegen  $x\dot{x} + y\dot{y} = r_1(\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi)$  ergibt sich daraus  $2r_2 \bar{x} k \sin(k\varphi) - 2r_2 \bar{y} k \cos(k\varphi) = 2r_1 y \sin \varphi - 2r_1 x \cos \varphi$ . Diese und die differenzierte Gleichung werden durch die Funktionen  $\bar{x}(\varphi)$  und  $\bar{y}(\varphi)$  erfüllt. Bevor dies nachgeprüft wird, sei noch bemerkt, daß der Punkt  $X^*$  der Eingriffspunkt ist. Ändert man den Parameter  $\varphi$ , so durchläuft  $X^*$  die **Eingriffslinie**.

Eine Parameterdarstellung der Eingriffslinie lautet

$$x^* = x(\varphi) \cos \varphi - y(\varphi) \sin \varphi = x^*(\varphi),$$

$$y^* = x(\varphi) \sin \varphi + y(\varphi) \cos \varphi = y^*(\varphi).$$

Um nachzuweisen, daß das Gegenprofil  $\bar{c}$  Hüllkurve der Kreisschar ist, setzt man in die Gleichung der Kreisschar für die laufenden Koordinaten  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$  die Funktionen  $\bar{x}(\varphi)$ ,  $\bar{y}(\varphi)$  ein. Ebenso verfährt man mit der durch Ableitung nach  $\varphi$  entstandenen Gleichung. Man erhält

$$\begin{aligned}(\bar{x}(\varphi))^2 + (\bar{y}(\varphi))^2 - 2r_2 \bar{y}(\varphi) \sin k\varphi - 2r_2 \bar{x}(\varphi) \cos k\varphi + r_2^2 \\ = (a - x \sin \varphi - y \cos \varphi)^2 + (x \cos \varphi - y \sin \varphi)^2 - 2r_2(a - x \sin \varphi - y \cos \varphi) + r_2^2 \\ = a^2 - 2(x \sin \varphi + y \cos \varphi) a + x^2 + y^2 - 2r_2(a - x \sin \varphi - y \cos \varphi) + r_2^2 \\ = a^2 + x^2 + y^2 - 2r_2 a - 2(x \sin \varphi + y \cos \varphi)(a - r_2) + r_2^2 \\ = a(a - r_2) - r_2(a - r_2) + x^2 + y^2 - 2(x \sin \varphi + y \cos \varphi) r_1 \\ = ar_1 - r_2 r_1 + x^2 + y^2 - 2(x \sin \varphi + y \cos \varphi) r_1 \\ = r_1(a - r_2) + x^2 + y^2 - 2(x \sin \varphi + y \cos \varphi) r_1 \\ = r_1^2 + x^2 + y^2 - 2(x \sin \varphi + y \cos \varphi) r_1.\end{aligned}$$

Dies ist aber die rechte Seite der ursprünglichen Gleichung. Für die durch Differentiation entstandene Gleichung findet man

$$\begin{aligned} 2r_2\bar{x}(\varphi) k \sin k\varphi - 2r_2\bar{y}(\varphi) k \cos k\varphi &= -2r_2k(x \cos \varphi - y \sin \varphi) \\ &= 2r_1y \sin \varphi - 2r_1x \cos \varphi. \end{aligned}$$

Die Funktionen  $\bar{x}(\varphi)$ ,  $\bar{y}(\varphi)$  erfüllen beide Gleichungen. Damit ist gezeigt, daß das Gegenprofil  $\bar{c}$  Hüllkurve der Kreisschar ist. Wählt man als Zahnflanke eine Kreisevolvente, so ist das Gegenprofil ebenfalls eine Kreisevolvente. Die Verzahnung wird dann als **Evolventenverzahnung** bezeichnet.

Der Kreis mit dem Mittelpunkt  $P'$  und dem Radius  $\overline{XP'}$  gehört auch zu einer Kreisschar, die in der Ebene des ersten Rades liegt und deren Hüllkurve die Zahnflanke  $c$  ist. Drehen sich beide Räder, so daß  $P'$  nach  $P$ ,  $X$  nach  $X^*$  kommt, so bewegt sich  $P'$  ebenfalls nach  $P$  und  $X$  nach  $X^*$ . Der Kreis um  $X$  mit Radius  $\overline{XP'}$  und der Kreis um  $X$  mit dem gleichen Radius  $\overline{XP'}$  gehen beide in denselben Kreis um  $P$  mit dem Radius  $\overline{PX^*}$  über. Da der eine Kreis in seiner ursprünglichen Lage die Zahnflanke  $c$  in  $X$ , der andere die Zahnflanke  $c$  in  $X$  berührt, beide Kreise nach der Drehung zusammenfallen, berühren sich die Zahnflanken  $c$  und  $\bar{c}$  nach der Drehung in  $X^*$  und ihre gemeinsame Normale  $PX^*$  geht durch  $P$ , wie es das Verzahnungsgesetz verlangt.

### 3.9. Minimalkoordinaten

Wir betrachten die  $x, y$ -Ebene und führen in ihr durch die Gleichungen

$$u = x + iy, \quad v = x - iy, \quad i^2 = -1,$$

neue Koordinaten  $u, v$  ein, die man *Minimalkoordinaten* oder *isotrope Koordinaten* nennt. Ist  $P$  ein reeller Punkt der Ebene, d. h., sind seine kartesischen Koordinaten  $x, y$  reell, so sind seine Minimalkoordinaten konjugiert komplex. Durch die Gleichungen  $x = \frac{1}{2}(u + v)$ ,  $y = \frac{1}{2i}(u - v)$  kann man von Minimalkoordinaten wieder zurück zu den kartesischen Koordinaten kommen. Aus diesen Gleichungen folgt, daß ein Punkt, dessen Minimalkoordinaten konjugiert komplex sind, stets reelle kartesische Koordinaten hat und daher ein reeller Punkt ist. Eine ebene Kurve hat in Minimalkoordinaten die Gestalt

$$f(u, v) = 0.$$

Soll die Kurve reell sein, so muß sie mehr als abzählbar unendlich viele reelle Punkte enthalten. Das sind Punkte, deren Minimalkoordinaten  $u, v$  die obige Gleichung erfüllen, wobei außerdem noch  $\bar{u} = v$  und  $\bar{v} = u$  gilt, wenn wir mit  $\bar{u}$  bzw.  $\bar{v}$  die zu  $u = x + iy$  bzw.  $v = x - iy$  konjugiert komplexe Zahl  $\bar{u} = x - iy$  bzw.  $\bar{v} = x + iy$  bezeichnen. Für die Gleichung  $f(u, v) = 0$  einer reellen Kurve gilt also, daß  $f(u, \bar{u}) = 0$  für unendlich viele Paare  $u, \bar{u}$  erfüllbar ist. Diese Bedingung ist auch hinreichend. Eine Gerade ist in impliziter Form durch eine Gleichung

$$Au + Bv + C = 0$$

gegeben. Dabei können wir  $C$  stets so wählen, daß  $C$  reell und  $\leq 0$  ist, während  $A = ae^{i\alpha}$ ,  $B = be^{i\beta}$  im allgemeinen komplexe Zahlen sind. Soll die Gerade reell sein, so muß  $B = \bar{A}$  sein. Zur Veranschaulichung faßt man die  $x, y$ -Ebene als Gaußsche Zahlenebene mit der  $x$ -Achse als reeller Achse auf und trägt darin die Zahlen  $A, \bar{A}, 2\bar{A}$  und den Kreis  $k$  mit dem Radius  $\sqrt{-C}$  ein (Bild 3.25). Invertiert man den Punkt  $2\bar{A}$  an  $k$ , so erhält man  $A^*$  (vgl. Aufgabe 3.13). Es ist

$$|OA^*| |O(2\bar{A})| = -C > 0.$$

Die durch  $A$  senkrecht zu  $OA$  verlaufende Gerade  $g$  stellt dann die durch die Gleichung

$$Au + \bar{A}v + C = 0, \quad C < 0,$$

gegebene Gerade dar. Falls  $C = 0$  ist, geht die Gerade durch den Ursprung  $O$  und ist senkrecht zu  $OA$ .

Ist dagegen die reelle Gerade  $g$  in expliziter Form gegeben, so lautet ihre Gleichung  $v = mu + n$  mit

$$m = -\frac{A}{\bar{A}} = -\frac{e^{i\alpha}}{e^{-i\alpha}} = -e^{2i\alpha}, \quad n = \frac{C}{a} e^{i\alpha} \quad \text{und} \quad m = -\frac{n}{\bar{n}}.$$

Die Lage von  $g$  ergibt sich, wenn man in die Gaußsche Zahlenebene die komplexe Zahl  $\frac{1}{2} \bar{n}$  einträgt.

Dann stellt die durch den Endpunkt  $M$  des Vektors  $\frac{1}{2} \bar{n}$  senkrecht zu  $OM$  verlaufende Gerade die Gerade  $g$  dar (vgl. Bild 3.26). Ein Kreis mit dem Radius  $r$ , dem Mittelpunkt  $M_0$ , wo  $u_0, v_0$  dessen Minimalkoordinaten sind, hat die Gleichung

$$(u - u_0)(v - v_0) = r^2.$$

Der Abstand  $d$  zweier Punkte  $P_1(u_1, v_1), P_2(u_2, v_2)$  ist gegeben durch

$$d = \sqrt{(u_1 - u_2)(v_1 - v_2)}.$$

Für die Gleichung der Tangente  $t_0$  und der Normale  $n_0$  im Punkt  $P_0(u_0, v_0)$  einer Kurve mit der Gleichung  $f(u, v) = 0$  erhält man

$$t_0: (u - u_0)f_u(u_0, v_0) + (v - v_0)f_v(u_0, v_0) = 0,$$

$$n_0: (u - u_0)f_u(u_0, v_0) - (v - v_0)f_v(u_0, v_0) = 0.$$

Für die Krümmung  $\varkappa$  im Punkt  $P_0(u_0, v_0)$  ergibt sich aus (3.33) in 3.4.

$$\varkappa = \frac{f_{uu}^0(f_v^0)^2 - 2f_{uv}^0 f_u^0 f_v^0 + f_{vv}^0(f_u^0)^2}{2(\sqrt{f_u^0 f_v^0})^3},$$

wenn wir zur Abkürzung für  $f_{uu}(u_0, v_0) = f_{uu}^0, f_v(u_0, v_0) = f_v^0$  usw. setzen. Wir vermerken noch, daß für die Faktoren  $m$  und  $m'$  zweier in expliziter Form gegebener reellen Geraden  $g, g'$  mit den Gleichungen  $v = mu + n, v = m'u + n'$  die Bedingung  $m + m' = 0$  genau dann gilt, wenn  $g$  und  $g'$  zueinander senkrecht sind.

Die Koordinatenachsen des Minimalkoordinatensystems sind zwei imaginäre Geraden mit den Gleichungen  $u = 0, v = 0$  bzw.  $x + iy = 0, x - iy = 0$  in kartesischen Koordinaten, die auch als *Minimalgeraden* bezeichnet werden.

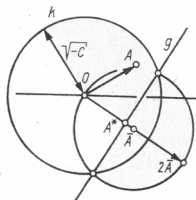


Bild 3.25

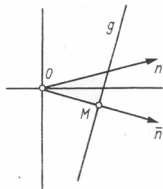


Bild 3.26

## 4. Flächentheorie

### 4.1. Grundbegriffe der Flächentheorie

#### 4.1.1. Zulässige Parameterdarstellungen

Im dreidimensionalen euklidischen Raum  $E^3$  sei ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem  $O(x_1, x_2, x_3)$  mit dem Ursprung  $O$  und den Achsen  $x_1, x_2, x_3$  gegeben. Wir betrachten eine Gleichung der Gestalt

$$x_3 = f(x_1, x_2), \quad (4.1)$$

wo  $f$  eine eindeutige reelle Funktion der zwei Veränderlichen  $x_1, x_2$  ist. Die Funktion  $f$  sei auf einem gewissen (zweidimensionalen) Gebiet  $G$  der  $x_1, x_2$ -Ebene erklärt und dort stetig nach  $x_1$  und  $x_2$  differenzierbar. Das Gebiet  $G$  kann auch die ganze  $x_1, x_2$ -Ebene sein. Dann ist durch (4.1) die Gleichung einer **gekrümmten Fläche** des Raumes  $E^3$  gegeben. Ist speziell  $f$  eine lineare Funktion, das heißt, gilt  $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2 + c$ , so stellt (4.1) die Gleichung einer Ebene dar. In diesem Fall ist das Definitionsgebiet  $G$  die ganze  $x_1, x_2$ -Ebene.

Für viele Aufgaben erweist sich jedoch die Darstellung einer Fläche durch eine Gleichung der Form (4.1) als ungünstig. Daher wurde bereits von C. F. Gauß eine andere Art der Darstellung einer Fläche gewählt, die inzwischen durch die Einführung der Vektorrechnung noch weiter vervollkommen wurde. Sind  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$  die drei Einheitsvektoren in Richtung der drei Koordinatenachsen  $x_1, x_2, x_3$ , so kann man einen beliebigen Vektor  $\mathbf{x}$  des Raumes  $E^3$  in der Form

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{i} + x_2\mathbf{j} + x_3\mathbf{k}$$

schreiben. Die Koordinaten sind reelle Zahlen. Es möge der Vektor  $\mathbf{x}$  noch von zwei unabhängigen Variablen  $u^1, u^2$ , die auch als *Parameter* bezeichnet werden, abhängen.<sup>1)</sup> Dann sind die Koordinaten  $x_i$  keine Zahlen mehr, sondern Funktionen der zwei Variablen  $u^1, u^2$  und man schreibt

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = x_1(u^1, u^2)\mathbf{i} + x_2(u^1, u^2)\mathbf{j} + x_3(u^1, u^2)\mathbf{k}. \quad (4.2)$$

Faßt man  $u^1, u^2$  als Koordinaten von Punkten einer  $u^1, u^2$ -Ebene auf, in der ein orthogonales kartesisches Koordinatensystem  $O'(u^1, u^2)$  gegeben ist, dann sind die drei Funktionen  $x_i$  der Variablen  $u^1, u^2$  im allgemeinen nicht für alle Punkte der  $u^1, u^2$ -Ebene definiert, sondern nur für die Punkte eines gewissen Gebietes  $B$ <sup>2)</sup> dieser Ebene. Eine Gleichung der Gestalt (4.2) heißt eine *vektorielle Parameterdarstellung*. Sie kann auch in drei skalare Gleichungen zerlegt werden. Dann erhält man

$$x_1 = x_1(u^1, u^2), \quad x_2 = x_2(u^1, u^2), \quad x_3 = x_3(u^1, u^2). \quad (4.3)$$

Man nennt drei derartige Gleichungen eine Gaußsche Parameterdarstellung im  $E^3$ .

<sup>1)</sup> Wir werden – wie in der Tensorrechnung – von der Schreibweise Gebrauch machen, Größen auch oben zu indizieren. Der Grund wird auf den Seiten 80 und 93 ersichtlich. Man unterscheide im folgenden zwischen Potenzen und oberen Indizes!

<sup>2)</sup>  $B$  sei einfach zusammenhängend und beschränkt (vgl. [9] Bd. 2, S. 304, Bd. 3, S. 292).

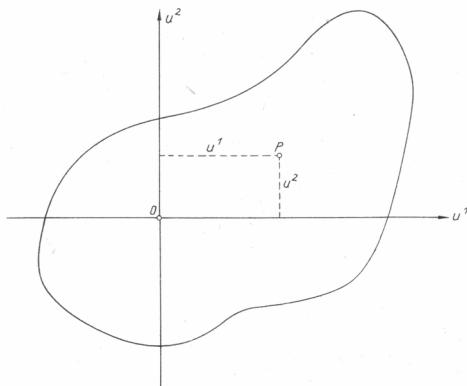


Bild 4.1. Der Wertebereich der Parameter  $u^1, u^2$  ist ein einfach zusammenhängendes Gebiet  $B$ , das durch die im Bild dargestellte Kurve begrenzt wird

Eine (vektorielle) Parameterdarstellung heißt eine **zulässige Parameterdarstellung** der Klasse  $r \geq 1$  für das Gebiet  $B$ , wenn folgendes gilt:

1. Die drei Funktionen  $x_i$  sind in allen Punkten von  $B$  stets  $r$ -mal ( $r \geq 1$ ) stetig nach  $u^1$  und  $u^2$ -differenzierbar.

2. Jedem Punkt  $P$  aus  $B$  mit den Koordinaten  $u^1, u^2$  entspricht vermöge (4.2) ein Punkt  $X$  einer gewissen Punktmenge  $M$  des  $E^3$ , wenn man den Vektor  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  als Ortsvektor auffaßt, d. h. ihn durch eine gerichtete Strecke darstellt, die vom Ursprung  $O$  zu dem Punkt  $X$  mit den Koordinaten  $x_i(u^1, u^2)$  verläuft und mit einem Richtungssinn versehen ist, der durch einen von  $O$  nach  $X$  gehenden Pfeil gekennzeichnet wird.

3. Jedem Punkt  $X$  der Punktmenge  $M$  entspricht ein Punkt  $P$  des Gebietes  $B$  mit den Koordinaten  $u^1, u^2$ , so daß  $x_i(u^1, u^2)$  die Koordinaten von  $X$  sind.

4. Bildet man aus den ersten Ableitungen  $\partial x_i / \partial u^1, \partial x_i / \partial u^2$  ( $i = 1, 2, 3$ ) die Matrix  $\mathbf{I}$

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u^1} & \frac{\partial x_3}{\partial u^2} \end{pmatrix},$$

so soll  $\mathbf{I}$  in allen Punkten von  $B$  den Rang 2 haben, d. h., daß wenigstens eine der zweireihigen Unterdeterminanten von  $\mathbf{I}$  nicht verschwindet.



Ist  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  eine zulässige Parameterdarstellung der Klasse  $r \geq 1$  für das Gebiet  $B$  und läßt man die Parameter  $u^1, u^2$  alle durch das Gebiet  $B$  erlaubten Werte durchlaufen, d. h., wählt man alle solchen Wertepaare  $u^1, u^2$  aus, die Koordinaten eines beliebigen Punktes  $P$  von  $B$  sind, so beschreibt der Endpunkt  $X$  des Ortsvektors  $\vec{OX} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$  eine **gekrümmte Fläche** bzw. ein **Flächenstück** im  $E^3$ .

Dies sieht man wie folgt ein. Zu jedem beliebigen Punkt  $X$  mit den Koordinaten  $x_1, x_2, x_3$  aus der Punktmenge  $M$  gibt es wegen 3. einen Punkt  $P$  des Gebietes  $B$  mit den Koordinaten  $u^1, u^2$ , so daß  $x_1 = x_1(u^1, u^2)$ ,  $x_2 = x_2(u^1, u^2)$ ,  $x_3 = x_3(u^1, u^2)$  ist. Da wegen 4. die Matrix  $\mathbf{I}$  den Rang 2 hat, gibt es eine zweireihige Unterdeterminante von  $\mathbf{I}$ , die im Punkt  $P$  nicht verschwindet. Es sei zum Beispiel

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u^1} & \frac{\partial x_1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u^1} & \frac{\partial x_2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Dann kann man die zwei Gleichungen  $x_1 = x_1(u^1, u^2)$ ,  $x_2 = x_2(u^1, u^2)$ , was hier nicht bewiesen werden kann (vgl. Bd. 4, Satz 3.15), lokal (d. h. in einer gewissen Umgebung des Punktes  $P$ ) nach  $u^1$  und  $u^2$  auflösen. Man erhält  $u^1 = \varphi(x_1, x_2)$ ,  $u^2 = \psi(x_1, x_2)$ . Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, so ergibt sich

$$x_3 = x_3(\varphi(x_1, x_2), \psi(x_1, x_2)) = f(x_1, x_2). \quad (4.4)$$

Die Funktionen  $\varphi, \psi$  sind im allgemeinen nach  $x_1, x_2$  differenzierbar, daher wegen 1. auch  $f$ . Durch (4.4) ist aber die Gleichung einer gekrümmten Fläche im  $E^3$  gegeben. Gleichung (4.4) wird durch die Koordinaten von  $X$  erfüllt. Da  $X$  jeder Punkt von  $M$  sein kann, liegt die gesamte Punktmenge  $M$  auf der Fläche. Aus Gründen der Stetigkeit liegen die Punkte von  $M$  auch dicht auf der Fläche. Somit ist durch eine zulässige Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  eine Fläche bzw. ein Flächenstück im  $E^3$  gegeben.

Man kann umgekehrt jeder Fläche, die durch eine Gleichung der Form (4.4)  $x_3 = f(x_1, x_2)$  gegeben ist, sofort eine zulässige Parameterdarstellung zuordnen, indem man  $x_1 = u^1$ ,  $x_2 = u^2$  und  $x_3 = f(u^1, u^2)$  setzt. Allerdings wird dabei vorausgesetzt, daß  $f$  nach  $u^1$  und  $u^2$  wenigstens einmal stetig differenzierbar ist. Man erhält

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = u^1 \mathbf{i} + u^2 \mathbf{j} + f(u^1, u^2) \mathbf{k}.$$

Falls das Gebiet  $B$  als beschränkt vorausgesetzt wird, ist in der Regel durch eine zulässige Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  nur ein Flächenstück gegeben. Die Fläche, zu der ein solches Flächenstück gehört, wird dann durch eine Menge von derartigen Flächenstücken definiert, die die Fläche dachziegelartig überdecken.

Hat die Matrix  $\mathbf{I}$  für ein Wertepaar  $u^1, u^2$  einen Rang  $< 2$ , so heißt der durch  $u^1, u^2$  bestimmte Punkt der Fläche bezüglich der betreffenden Parameterdarstellung **singulär**. Ist ein Punkt bezüglich aller Parameterdarstellungen eines Flächenstückes singulär, so heißt er ein **singulärer Punkt** des Flächenstückes (vgl. Aufgabe 4.2). Ein Punkt einer Fläche heißt **regulär**, wenn es ein Flächenstück gibt, das diesen Punkt enthält, so daß wenigstens eine Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  dieses Flächenstückes in diesem Punkt der Matrix  $\mathbf{I}$  den Rang 2 zuordnet.

#### 4.1.2. Flächenkurven, Koordinatenlinien einer Fläche und die erste Grundform der Flächentheorie

Es sei im  $E^3$  eine zulässige Parameterdarstellung der Klasse  $r \geq 1$

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = x_1(u^1, u^2) \mathbf{i} + x_2(u^1, u^2) \mathbf{j} + x_3(u^1, u^2) \mathbf{k} \quad (4.5)$$

bezüglich des Gebietes  $B$  der  $u^1, u^2$ -Ebene gegeben. Durch  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  ist, wie bereits im vorhergehenden Abschnitt bemerkt wurde, eine Fläche  $F$  bestimmt. Wir wollen annehmen, daß die zwei Parameter  $u^1, u^2$  differenzierbare Funktionen einer reellen Variablen  $t$  sind, die entweder alle reellen Zahlen durchläuft oder die Bedingung  $t_1 \leq t \leq t_2$  erfüllt.

Wir schreiben

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(t), \\ u^2 &= u^2(t). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Die Wertebereiche der Funktionen  $u^1: t \rightarrow u^1(t)$  und  $u^2: t \rightarrow u^2(t)$  seien so beschaffen, daß ein Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $u^1(t), u^2(t)$  stets zum Bereich  $B$  gehört. Dann stellen die beiden Gleichungen (4.6) die Parameterdarstellung einer Kurve  $c_B$  der  $u^1, u^2$ -Ebene dar, die ganz im Gebiet  $B$  verläuft. Setzt man (4.6) in (4.5) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t)) = x_1(u^1(t), u^2(t)) \mathbf{i} + x_2(u^1(t), u^2(t)) \mathbf{j} + x_3(u^1(t), u^2(t)) \mathbf{k} \\ &= x_1(t) \mathbf{i} + x_2(t) \mathbf{j} + x_3(t) \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Das ist die Parameterdarstellung einer **Raumkurve**  $c$ . Durchläuft der Punkt  $P$  mit den Koordinaten  $u^1, u^2$  das ganze Gebiet  $B$  und setzt man alle diese Koordinatenpaare  $u^1, u^2$  in die Parameterdarstellung (4.5) ein, so beschreibt die Spitze  $X$  des vom Punkt  $O$  ausgehenden Vektors  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  die Fläche  $F$ . Da unter allen diesen möglichen Koordinatenpaaren  $u^1, u^2$  auch  $u^1(t)$  und  $u^2(t)$  sind, liegt die Raumkurve  $c$  ganz auf der Fläche  $F$ . Die Raumkurve  $c$  ist demnach zugleich eine Flächenkurve der Fläche  $F$ .

Um den Tangentenvektor von  $c$  zu gewinnen, differenzieren wir (4.5) nach  $t$  und erhalten

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1} \frac{du^1}{dt} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^2} \frac{du^2}{dt} \quad (4.7)$$

bzw.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{u^1} \dot{u}^1 + \mathbf{x}_{u^2} \dot{u}^2, \quad (4.7')$$

wenn wir zur Abkürzung  $dx/dt = \dot{\mathbf{x}}$ ,  $\mathbf{x}_{u^v} = \partial \mathbf{x} / \partial u^v$ ,  $\dot{u}^v = du^v/dt$ , ( $v = 1, 2$ ) setzen. Nimmt man speziell an, daß die Gleichungen (4.6) die Gestalt  $u^1 = t$ ,  $u^2 = C$  haben, wo  $C$  eine passend gewählte Konstante ist und  $t$  zu dem Intervall  $[t_1, t_2]$  gehört, so bezeichnet man  $c$  als  **$u^1$ -Linie**, ist hingegen  $u^1 = K$ ,  $u^2 = t$  mit passendem  $K$  und  $t \in [t_3, t_4]$ , so nennt man  $c$  eine  **$u^2$ -Linie**. Diese  $u^1$ - bzw.  $u^2$ -Linien liegen ebenfalls auf  $F$ . Die Konstanten  $C$  bzw.  $K$  müssen so gewählt werden, daß die Gerade  $u^2 = C$  bzw. die Gerade  $u^1 = K$  der  $u^1, u^2$ -Ebene mindestens ein Stück im Gebiet  $B$  verläuft. Da man  $C$  bzw.  $K$  auf beliebig viele Arten so wählen kann, gibt es eine ganze Schar von  $u^1$ -Linien und eine ebensolche Schar von  $u^2$ -Linien auf  $F$ . Die  $u^1$ -

Linie  $u^2 = C$  und die  $u^1$ -Linie  $u^1 = K$  schneiden sich im Punkt  $X_0$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}(C, K)$ . Daher bilden die  $u^1$ - und die  $u^2$ -Linien auf  $F$  ein **Kurvennetz**. Durch jeden regulären Punkt  $X$  der Fläche  $F$  geht eine  $u^1$ -Linie und eine  $u^2$ -Linie. Durch ein solches Kurvennetz ist auf der Fläche  $F$  ein *Gaußsches Koordinatensystem*<sup>1)</sup> gegeben. Denn die Parameterwerte  $u^1, u^2$  haben die Bedeutung von Koordinaten. Man nennt sie *Gaußsche Koordinaten*, und die  $u^1$ - bzw.  $u^2$ -Linien heißen *Koordinatenlinien*. Die Tangentenvektoren der  $u^1$ -Linie  $u^1 = t, u^2 = C$  durch  $X_0$  sind durch  $\mathbf{x}_{u^1}(t, C) = \mathbf{x}_{u^1}(u^1, C)$ , die Tangentenvektoren der  $u^2$ -Linie  $u^1 = K, u^2 = t$  im selben Punkt sind durch  $\mathbf{x}_{u^2}(K, t) = \mathbf{x}_{u^2}(K, u^2)$  gegeben. Ist  $X$  ein beliebiger Punkt auf  $F$  mit den Gaußschen Koordinaten  $u^1, u^2$ , so sind die Tangentenvektoren der beiden durch  $X$  gehenden Koordinatenlinien  $\mathbf{x}_{u^1}(u^1, u^2)$  und  $\mathbf{x}_{u^2}(u^1, u^2)$ . Stellt man diese Vektoren als gerichtete Strecken mit dem Anfangspunkt  $X$  dar, so bestimmen sie eine Ebene  $\tau_X$ , die von dem durch  $X$  gehenden beiden Koordinatenlinien im Punkt  $X$  berührt wird. Da der Tangentenvektor  $\dot{\mathbf{x}}(t)$  einer beliebigen durch  $X$  verlaufenden Flächenkurve  $c$  wegen (4.7') die Gestalt  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_{u^1}\dot{u}^1 + \mathbf{x}_{u^2}\dot{u}^2$  hat, liegt er, wenn er als gerichtete Strecke mit dem Anfangspunkt  $X$  aufgefaßt wird, ebenfalls in der Ebene  $\tau_X$ . Daher berührt jede durch  $X$  gehende Flächenkurve die Ebene  $\tau_X$  im Punkt  $X$ . Demnach ist die Ebene  $\tau_X$  die **Tangentialebene** an die Fläche  $F$  im Punkt  $X$ . Man sagt auch, daß die Ableitungsvektoren  $\mathbf{x}_{u^1}(u^1, u^2), \mathbf{x}_{u^2}(u^1, u^2)$  die Tangentialebene  $\tau_X$  an die Fläche  $F$  im Punkt  $X$  aufspannen.

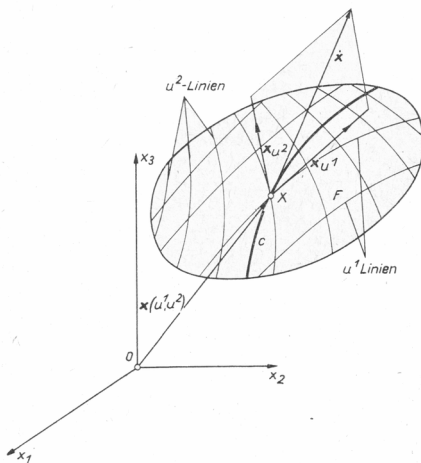


Bild 4.2. Fläche mit Parameterlinien, Tangentialebene, Ableitungsvektoren und Flächenkurve

<sup>1)</sup> Auch krummliniges Koordinatensystem genannt.

Kehren wir zur Flächenkurve  $c$  zurück. Das Bogenelement  $ds$  dieser Kurve ist gegeben durch

$$ds^2 = dx \cdot dx. \quad (4.8)$$

Dabei ist

$$dx = \dot{x} dt = (x_u^1 \dot{u}^1 + x_u^2 \dot{u}^2) dt = x_u^1 du^1 + x_u^2 du^2.$$

Setzt man dies in Gleichung (4.8) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} ds^2 &= (x_u^1 du^1 + x_u^2 du^2) \cdot (x_u^1 du^1 + x_u^2 du^2) \\ &= (x_u^1 \cdot x_u^1) (du^1)^2 + 2(x_u^1 \cdot x_u^2) du^1 du^2 + (x_u^2 \cdot x_u^2) (du^2)^2. \end{aligned}$$

Wir führen zur Abkürzung die folgenden Bezeichnungen

$$x_{u^\nu} \cdot x_{u^\mu} = g_{\nu\mu} \quad (\nu, \mu = 1, 2) \quad (4.9)$$

mit  $g_{\nu\mu} = g_{\mu\nu}$  ein. Dann erhalten wir

$$(ds)^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2. \quad (4.10)$$

Der Ausdruck auf der rechten Seite von Gleichung (4.10) ist homogen vom zweiten Grad in den Differentialen  $du^1, du^2$ . Man bezeichnet einen solchen Ausdruck als eine quadratische Differentialform. In der Differentialgeometrie wird die obige Differentialform (4.10) auch als **erste Grundform** der Flächentheorie bezeichnet. In manchen Lehrbüchern ist es üblich, statt  $g_{11}, g_{12}, g_{22}$  die Bezeichnungen  $E, F, G$  zu verwenden.<sup>1)</sup> Wir wollen die erste Grundform noch mit  $I$  bezeichnen und die in der Differentialgeometrie übliche Summationsvereinbarung benutzen.

*Summationsvereinbarung:* Über einen Index, der in einem Produkt zweimal – einmal als unterer und einmal als oberer Index – vorkommt, ist zu summieren. Die Summation läuft von 1 bis 2. Das Summationszeichen wird weggelassen.

Dann kann man für die erste Grundform auch schreiben

$$I = ds^2 = g_{\nu\mu} du^\nu du^\mu. \quad (4.11)$$

Die erste Grundform der Flächentheorie ist für alle metrischen Fragen wie z. B. Längen- und Winkelmessungen auf der Fläche maßgebend. Man bezeichnet sie daher als **metrische Grundform**.

Die Koeffizienten  $g_{\nu\mu}$  bilden die Komponenten eines Tensors zweiter Stufe<sup>2)</sup>. Dieser heißt der **kovariante Maßtensor**, metrische Tensor oder auch Fundamentaltensor auf der betreffenden Fläche.

#### 4.1.3. Parameterdarstellungen spezieller Flächen

In diesem Abschnitt sollen verschiedene Parameterdarstellungen betrachtet werden.

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x(u^1, u^2) &= r \cos u^1 \cos u^2 \mathbf{i} + r \sin u^1 \cos u^2 \mathbf{j} + r \sin u^2 \mathbf{k}, \\ -\pi &\leq u^1 \leq +\pi, \quad -\pi/2 \leq u^2 \leq \pi/2. \end{aligned}$$

Das Gebiet  $B$  ist hier ein Rechteck der Länge  $2\pi$  und der Breite  $\pi$  (vgl. Bild 4.3).

<sup>1)</sup> Vgl. [1], [3], [11] und [13].

<sup>2)</sup> Vgl. Band 11 und [6], S. 99–106, S. 117.

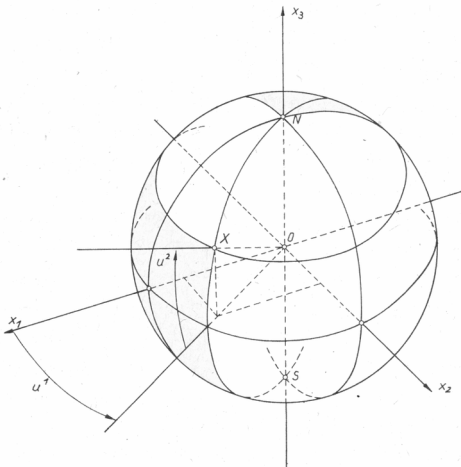


Bild 4.3. Oberfläche einer Kugel mit Gaußschem Koordinatensystem

Es ist

$$x_1 = r \cos u^1 \cos u^2,$$

$$x_2 = r \sin u^1 \cos u^2,$$

$$x_3 = r \sin u^2.$$

Durch Quadrieren und Addieren dieser drei Gleichungen erhält man

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 = r^2.$$

Das bedeutet, daß die Punkte  $X$ , der durch die Parameterdarstellung a) gegebenen Fläche den konstanten Abstand  $r$  vom Koordinatenursprung  $O$  haben. Die Fläche ist eine *Kugelfläche* mit dem Ursprung  $O$  als Mittelpunkt und dem Radius  $r$ . Für die Ableitungsvektoren  $x_{u^1}$ ,  $x_{u^2}$  ergibt sich

$$\mathbf{x}_{u^1} = -r \sin u^1 \cos u^2 \mathbf{i} + r \cos u^1 \cos u^2 \mathbf{j},$$

$$\mathbf{x}_{u^2} = -r \cos u^1 \sin u^2 \mathbf{i} - r \sin u^1 \sin u^2 \mathbf{j} + r \cos u^2 \mathbf{k}.$$

Für die Koeffizienten der ersten Grundform erhält man

$$g_{11} = r^2 \cos^2 u^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = r^2.$$

Damit lautet die erste Grundform

$$I = ds^2 = r^2 \cos^2 u^2 (du^1)^2 + r^2 (du^2)^2.$$

Für  $u^2 = \pi/2$ ,  $-\pi \leq u^1 \leq +\pi$  erhält man ein- und denselben Punkt  $N$  auf der Kugel. Wir fassen ihn als *Nordpol* auf. Desgleichen erhält man für  $u^2 = -\pi/2$ ,  $-\pi \leq u^1 \leq \pi$  einen Punkt  $S$ , den wir als *Südpol* ansehen können. Dann stellt  $u^1$  die geographische Länge und  $u^2$  die geographische Breite

dar. Die  $u^1$ -Linien, die durch  $u^2 = \text{konstant}$  gegeben sind, stellen die *Breitenkreise* dar, während die  $u^2$ -Linien, gegeben durch  $u^1 = \text{konstant}$ , die *Meridiane* sind. Jeder Meridian ist ein halber Großkreis (Radius  $r$ ) vom Punkt  $N$  zum Punkt  $S$ . Beide Kurvenscharen – die Breitenkreise und die Meridiane – schneiden sich orthogonal. Daher liegt hier ein *orthogonales Gaußsches Koordinatensystem* vor. Dies ergibt sich auch, wie im Abschnitt 4.6. gezeigt wird, daraus, daß für alle Wertepaare  $u^1, u^2$  mit  $-\pi \leq u^1 \leq \pi$ ,  $-\pi/2 \leq u^2 \leq \pi/2$  der Koeffizient  $g_{12} = 0$  ist. In den Punkten  $N$  und  $S$  ist diese Parameterdarstellung nicht mehr zulässig, weil die Matrix  $\mathbf{I}$  für die Punkte  $P \in B$  mit  $-\pi \leq u^1 \leq \pi$ ,  $u^2 = \pi/2$  bzw.  $u^2 = -\pi/2$  den Rang 1 hat. Außerdem entspricht jedem solchen Punkt  $P$  jeweils der Punkt  $N$  bzw.  $S$  auf der Kugelfläche. Für diese Punkte ist daher die geforderte Eineindeutigkeit der Zuordnung zwischen den Punkten von  $B$  und den Punkten der Punktmenge  $M$ , die hier mit der Kugelfläche identisch ist, nicht mehr gewährleistet. Man nennt solche Punkte wie  $N$  bzw.  $S$  *singulär* bezüglich der Parameterdarstellung. Jedoch sind  $N$  und  $S$  keine singulären Punkte der Kugelfläche, weil es Parameterdarstellungen gibt, bei denen die Matrix  $\mathbf{I}$  in  $N$  und  $S$  den Rang 2 hat.

$$\text{b) } \mathbf{x}(u^1, u^2) = a \cos u^1 \mathbf{i} + a \sin u^1 \mathbf{j} + u^2 \mathbf{k}, \quad 0 \leq u^1 \leq 2\pi, \quad -\infty < u^2 < +\infty.$$

In diesem Fall ergibt sich  $x_1 = a \cos u^1$ ,  $x_2 = a \sin u^1$ ,  $x_3 = u^2$ . Hieraus folgt  $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ .

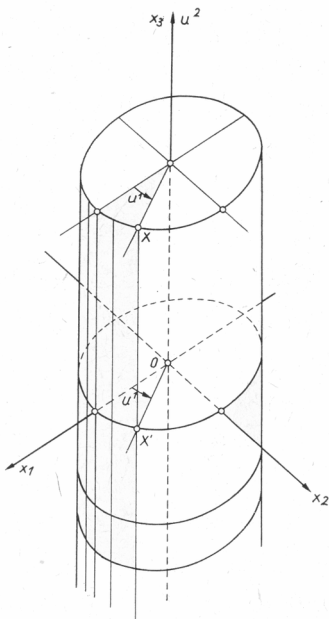


Bild 4.4. Gerader Kreiszylinder mit Gaußschem Koordinatensystem

Die durch b) gegebene Fläche ist ein *gerader Kreiszylinder (Drehzylinder)*, dessen Achse die  $x_3$ -Achse und dessen Grundkreis der Kreis mit dem Radius  $a$  in der  $x_1, x_2$ -Ebene mit dem Ursprung  $O$  als Mittelpunkt ist. Die  $u^1$ -Linien ( $u^2 = \text{konstant}$ ) sind Kreise, die zum Grundkreis kongruent sind und deren Ebenen parallel zur  $x_1, x_2$ -Ebene liegen. Die  $u^2$ -Linien ( $u^1 = \text{konstant}$ ) sind die Mantellinien des Kreiszylinders. Das sind parallele Geraden zur  $x_3$ -Achse. Das Netz der Koordinatenlinien ist hier ebenfalls ein *orthogonales Netz*.

Für die Ableitungsvektoren ergibt sich

$$\mathbf{x}_{u^1} = -a \sin u^1 \mathbf{i} + a \cos u^1 \mathbf{j}, \quad \mathbf{x}_{u^2} = \mathbf{k}.$$

Damit erhält man  $g_{11} = a^2$ ,  $g_{12} = 0$ ,  $g_{22} = 1$ . Der Rang der Matrix  $\mathbf{I}$  ist für alle Werte  $u^1, u^2$  mit  $0 \leq u^1 \leq 2\pi$ ,  $-\infty < u^2 < \infty$  gleich 2. Die Parameterdarstellung b) ist überall zulässig. Das Gebiet  $B$  ist der durch die Gerade  $u^1 = 2\pi$  und durch die  $u^2$ -Achse begrenzte Streifen der  $u^1, u^2$ -Ebene.

#### 4.1.4. Die Bogenlänge einer Flächenkurve

Es sei eine Fläche  $F^2$  durch eine für das Gebiet  $B$  zulässige Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$  der Klasse  $r \geq 1$  gegeben. Auf  $F$  sei durch  $u^1 = u^1(t)$ ,  $u^2 = u^2(t)$ ,  $t_1^0 \leq t \leq t_2$  eine Flächenkurve  $c$  bestimmt.  $X_0$  und  $X$  seien zwei Punkte der Kurve  $c$ . Die Gaußschen Koordinaten von  $X_0$  seien  $u_0^1 = u^1(t_0)$ ,  $u_0^2 = u^2(t_0)$ , die von  $X$  seien  $u^1 = u^1(t)$ ,  $u^2 = u^2(t)$  mit  $t_0, t \in [t_1, t_2]$  und  $t > t_0$ . Wir wollen die Länge des Kurvenstücks von  $X_0$  bis  $X$  mit  $s$  bezeichnen. Es ergibt sich

$$s = \int_{X_0}^X ds = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{\nu\mu} \dot{u}^\nu \dot{u}^\mu} dt. \quad (4.12)$$

Offensichtlich ist  $s$  eine Funktion der oberen Grenze  $t$ . Setzt man  $du^\nu = \dot{u}^\nu dt$  und betrachtet  $t_0$  als konstant, so erhält man

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{g_{\nu\mu} \dot{u}^\nu \dot{u}^\mu} dt. \quad (4.12')$$

Die Bogenlänge des Kurvenstücks  $X_0X$  der Flächenkurve  $c$  läßt sich durch Integration finden, wenn man die Funktionen  $\dot{u}^\nu(t)$  ( $\nu = 1, 2$ ) kennt und wenn außerdem die Größen  $g_{\nu\mu}$  der ersten Grundform gegeben sind. Durch Differentiation von (4.12') nach  $t$  folgt

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{g_{\nu\mu} \dot{u}^\nu \dot{u}^\mu}. \quad (4.13)$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man, wenn eine Flächenkurve durch einen beliebigen Parameter  $t$  gegeben ist, die Bogenlänge dieser Flächenkurve als neuen Parameter einführen.

*Aufgabe 4.1:* Welche Flächen sind durch die folgenden Parameterdarstellungen gegeben?

a)  $\mathbf{x}(u^1, u^2) = a \cos u^2 \sin u^1 \mathbf{i} + b \sin u^2 \sin u^1 \mathbf{j} + c \cos u^1 \mathbf{k}$ ,

$$0 \leq u^1 \leq \pi, \quad 0 \leq u^2 \leq 2\pi, \quad a > b > c > 0.$$

b)  $\mathbf{x}(u^1, u^2) = u^1 \cos u^2 \mathbf{i} + u^1 \sin u^2 \mathbf{j} + au^1 \mathbf{k}$ ,

$$-\infty < u^1 < \infty, \quad 0 \leq u^2 \leq 2\pi, \quad a > 0.$$

Man berechne für beide Darstellungen die Größen  $g_{\nu\mu}$ .

\* **Aufgabe 4.2.:** Man zeige, daß der Punkt  $O(0, 0, 0)$  der in Aufgabe 4.1.b) gegebenen Fläche  $x(u^1, u^2) = u^1 \cos u^2 + u^1 \sin u^2 \mathbf{j} + au^1 \mathbf{k}$ ,  $-\infty < u^1 < +\infty$ ,  $0 \leq u^2 \leq 2\pi$ ,  $a > 0$ , ein singulärer Punkt der Fläche ist.

\* **Aufgabe 4.3:** Gegeben ist eine Zylinderfläche (parabolischer Zylinder) durch die Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = (1 + u^1) \mathbf{i} + \frac{1}{2} u^2 \mathbf{j} + \frac{1}{2} ((u^1)^2 - 2u^1) \mathbf{k},$$

$$-\infty < u^1 < +\infty, \quad -\infty < u^2 < +\infty.$$

Es werde angenommen, daß die  $x_1, x_2$ -Ebene horizontal verlaufe. Auf der Zylinderfläche sind außerdem die zwei Punkte  $P(1, 0, 0)$  und  $Q(2 - \cosh 2, \frac{1}{2} \sinh 2 \cosh 2 - 1, \frac{1}{2} (\cosh 2)^2 - \frac{1}{2})$  gegeben. Die Punkte  $P, Q$  sollen durch eine Böschungslinie (vgl. S. 35) verbunden werden, die ganz auf der Zylinderfläche verläuft. Man gebe eine Parameterdarstellung dieser Böschungslinie an und berechne die Bogenlänge des die Punkte  $P, Q$  verbindenden Kurvenstücks.

\* **Aufgabe 4.4:** In der  $x_1, x_3$ -Ebene des orthogonalen Koordinatensystems  $O(x_1, x_2, x_3)$  ist durch die Gleichung  $x_3 = f(x_1)$  eine ebene Kurve  $c$  bestimmt. Die Kurve  $c$  rotiere um die  $x_3$ -Achse. Man berechne eine Parameterdarstellung der dadurch entstehenden Rotationsfläche.

#### 4.1.5. Tangentialebene und Flächennormalenvektor

Die beiden Ableitungsvektoren  $\mathbf{x}_{u^1}, \mathbf{x}_{u^2}$  bestimmen, wie bereits erwähnt, die Tangentialebene  $\tau_X$  der Fläche  $F$  im Punkt  $X$ . Ist  $\mathbf{y}$  der Ortsvektor eines beliebigen Punktes  $Y$  dieser Tangentialebene, so gilt

$$\mathbf{y} = \mathbf{x}(u^1, u^2) + \lambda \mathbf{x}_{u^1} + \mu \mathbf{x}_{u^2} \quad (4.14)$$

mit  $-\infty < \lambda < +\infty, -\infty < \mu < +\infty$ .

Der **Normalenvektor**  $\mathbf{f}$ , der zugleich Normalenvektor der Fläche  $F$  im Berührungspunkt  $X$  ist, steht auf  $\mathbf{x}_{u^1}$  und  $\mathbf{x}_{u^2}$  senkrecht. Der Vektor  $\mathbf{f}$  sei so normiert, daß er den Betrag 1 hat. Dann gilt

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}}{|\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}|}.$$

In der Tat ist  $|\mathbf{f}| = |\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}| / |\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}| = 1$ . Wegen

$$|\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}| = \sqrt{(\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}) \cdot (\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2})}$$

$$= \sqrt{(\mathbf{x}_{u^1} \cdot \mathbf{x}_{u^1})(\mathbf{x}_{u^2} \cdot \mathbf{x}_{u^2}) - (\mathbf{x}_{u^1} \cdot \mathbf{x}_{u^2})^2}$$

[vgl. (1.7)] erhält man mit  $|\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}| = \sqrt{g}$

$$|\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{g}.$$

Damit ergibt sich für den Flächennormalenvektor

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}}{\sqrt{g}}. \quad (4.15)$$

Für die **Tangentialebene**  $\tau_X$  folgt aus (4.14) durch skalare Multiplikation mit  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{x}(u^1, u^2)$$

oder

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}(u^1, u^2)) \cdot \mathbf{f} = 0. \quad (4.16)$$



Setzt man für  $f$  den Ausdruck (4.15) ein und multipliziert die Gleichung mit  $\sqrt{g}$ , so geht (4.16) über in

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x}(u^1, u^2)) \cdot (\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}) = 0. \quad (4.17)$$

Aus  $|\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}|^2 = g$  ergibt sich, daß in einem regulären Flächenpunkt stets  $g > 0$  ist. Da nämlich in einem solchen Punkt der Rang der Matrix  $\mathbf{I}$  mit 2 angenommen werden kann, sind  $\mathbf{x}_{u^1}$  und  $\mathbf{x}_{u^2}$  linear unabhängig. Folglich ist  $|\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}| > 0$ . In einem regulären Flächenpunkt ist die erste Grundform auch immer positiv definit, d. h., es ist stets

$$ds^2 = g_{11}(du^1)^2 + 2g_{12} du^1 du^2 + g_{22}(du^2)^2 > 0,$$

wenn nur  $du^1$  und  $du^2$  nicht beide gleich null sind (vgl. [6], S. 104).

#### 4.1.6. Der Schnittwinkel zweier Flächenkurven

Auf der Fläche  $F$  mit der zulässigen Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$  seien zwei Flächenkurven  $c, \bar{c}$  gegeben, die sich im Punkt  $X_0$  schneiden sollen (Bild 4.5). Es gelte

$$c: u^1 = u^1(t), \quad u^2 = u^2(t),$$

$$\bar{c}: u^1 = \bar{u}^1(\tau), \quad u^2 = \bar{u}^2(\tau).$$

Für  $t = t_0$  und  $\tau = \tau_0$  erhält man  $u^i(t_0) = \bar{u}^i(\tau_0)$  ( $i = 1, 2$ ). Das heißt, daß der Punkt  $X_0$  durch den Ortsvektor

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(u^1(t_0), u^2(t_0)) = \mathbf{x}(\bar{u}^1(\tau_0), \bar{u}^2(\tau_0))$$

bestimmt wird. Unter einem **Schnittwinkel** der zwei Flächenkurven  $c, \bar{c}$  im Punkt  $X_0$  verstehen wir jeden der zwei Winkel, den die beiden Tangenten der Kurven  $c$  und  $\bar{c}$  im Schnittpunkt  $X_0$  miteinander bilden. Da die zwei Winkel Supplementwinkel sind, genügt es, einen von ihnen zu kennen. Dazu berechnen wir die Tangentenvek-

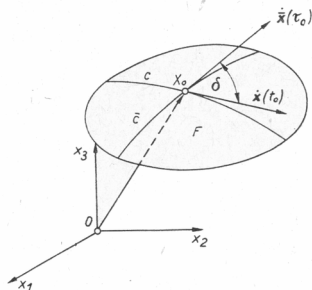


Bild 4.5. Der Schnittwinkel zweier Flächenkurven

toren der Kurven  $c$  und  $\bar{c}$  im Schnittpunkt  $X_0$ . Für die Parameterdarstellung der Kurven  $c, \bar{c}$  findet man

$$\begin{aligned} c: \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t)), \\ \bar{c}: \bar{\mathbf{x}}(\tau) &= \mathbf{x}(\bar{u}^1(\tau), \bar{u}^2(\tau)). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Damit ergibt sich für die Tangentenvektoren

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_{u^\nu} \dot{u}^\nu \quad \text{und} \quad \dot{\bar{\mathbf{x}}}(\tau) = \mathbf{x}_{\bar{u}^\mu} \dot{\bar{u}}^\mu.$$

Um die Tangentenvektoren der Kurven  $c, \bar{c}$  im Punkt  $X_0$  zu erhalten, müssen wir in den zuletzt erhaltenen Gleichungen  $t$  durch  $t_0$  und  $\tau$  durch  $\tau_0$  ersetzen. Wir finden

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0 &= \mathbf{x}_{u^\nu}(u^1(t_0), u^2(t_0)) \dot{u}^\nu(t_0), \\ \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0 &= \dot{\bar{\mathbf{x}}}(\tau_0) = \mathbf{x}_{\bar{u}^\mu}(\bar{u}^1(\tau_0), \bar{u}^2(\tau_0)) \dot{\bar{u}}^\mu(\tau_0) = \mathbf{x}_{u^\mu}(u^1(t_0), u^2(t_0)) \dot{\bar{u}}^\mu(\tau_0). \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Skalarproduktes der Vektoren  $\dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0$  findet man

$$\cos \delta = \cos(\dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0) = \frac{\dot{\mathbf{x}}_0 \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0}{|\dot{\mathbf{x}}_0| |\dot{\bar{\mathbf{x}}}_0|}. \quad (4.19)$$

Durch eine kurze Zwischenrechnung erhalten wir

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_0 \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0 &= \mathbf{x}_{u^\nu} \dot{u}^\nu(t_0) \cdot \mathbf{x}_{\bar{u}^\mu} \dot{\bar{u}}^\mu(\tau_0) = (\mathbf{x}_{u^\nu} \cdot \mathbf{x}_{\bar{u}^\mu}) \dot{u}^\nu(t_0) \dot{\bar{u}}^\mu(\tau_0) = g_{\nu\mu} \dot{u}^\nu(t_0) \dot{\bar{u}}^\mu(\tau_0), \\ |\dot{\mathbf{x}}_0| &= \sqrt{\dot{\mathbf{x}}_0 \cdot \dot{\mathbf{x}}_0} = \sqrt{\mathbf{x}_{u^\nu} \dot{u}^\nu(t_0) \cdot \mathbf{x}_{u^\mu} \dot{u}^\mu(t_0)} = \sqrt{g_{\nu\mu} \dot{u}^\nu(t_0) \dot{u}^\mu(t_0)}, \\ |\dot{\bar{\mathbf{x}}}_0| &= \sqrt{\dot{\bar{\mathbf{x}}}_0 \cdot \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0} = \sqrt{\mathbf{x}_{\bar{u}^\lambda} \dot{\bar{u}}^\lambda(\tau_0) \cdot \mathbf{x}_{\bar{u}^\sigma} \dot{\bar{u}}^\sigma(\tau_0)} = \sqrt{g_{\lambda\sigma} \dot{\bar{u}}^\lambda(\tau_0) \dot{\bar{u}}^\sigma(\tau_0)}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich schließlich

$$\cos \delta = \cos(\dot{\mathbf{x}}_0, \dot{\bar{\mathbf{x}}}_0) = \frac{g_{\nu\mu} \dot{u}^\nu(t_0) \dot{\bar{u}}^\mu(\tau_0)}{\sqrt{g_{\nu\mu} \dot{u}^\nu(t_0) \dot{u}^\mu(t_0)} \sqrt{g_{\lambda\sigma} \dot{\bar{u}}^\lambda(\tau_0) \dot{\bar{u}}^\sigma(\tau_0)}}.$$

Um den Schnittwinkel der durch einen Flächenpunkt  $X$  gehenden zwei Koordinatenlinien berechnen zu können, setzen wir für die Kurve  $c$  die durch  $X$  gehende  $u^1$ -Linie und für  $\bar{c}$  die durch  $X$  gehende  $u^2$ -Linie ein. Dann gilt für die  $u^1$ -Linie  $\dot{u}^1 = 1$ ,  $\dot{u}^2 = 0$  und für die  $u^2$ -Linie  $\dot{u}^1 = 0$ ,  $\dot{u}^2 = 1$ . Wir erhalten

$$\cos \delta = \frac{g_{12} \dot{u}^1 \dot{\bar{u}}^2}{\sqrt{g_{11} (\dot{u}^1)^2} \sqrt{g_{22} (\dot{\bar{u}}^2)^2}} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}. \quad (4.20)$$

Man nennt ein Gaußsches Koordinatensystem *orthogonal*, wenn die Koordinatenlinien sich in jedem Punkt des Gültigkeitsbereichs senkrecht schneiden. Es gilt der folgende einfache und wichtige

**S.4.1 Satz 4.1:** Ein Gaußsches Koordinatensystem auf einer Fläche ist genau dann orthogonal, wenn überall in dessen Gültigkeitsbereich

$$g_{12} = 0$$

ist.

*Beweis:* Ist auf  $F$  ein orthogonales Gaußsches Koordinatensystem gegeben, so muß  $\cos \delta$  überall im Gültigkeitsbereich verschwinden. Aus (4.20) folgt dann für alle Punkte des Gültigkeitsbereichs  $g_{12} = 0$ . Gilt umgekehrt überall im Gültigkeitsbereich  $g_{12} = 0$ , so ist wegen (4.20) auch überall  $\cos \delta = 0$ . Das heißt, die Koordinatenlinien schneiden sich überall im Gültigkeitsbereich orthogonal.

#### 4.1.7. Die Berechnung von Flächeninhalten

Es sei eine Fläche  $F$  durch die bezüglich des Bereichs  $B$  der  $u^1, u^2$ -Ebene zulässige Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$  gegeben. Auf der Fläche  $F$  liege ein Flächenstück  $H$ , dessen Flächeninhalt  $O(H)$  berechnet werden soll. Da die Parameterdarstellung zulässig ist, entspricht dem Flächenstück  $H$  in der  $u^1, u^2$ -Ebene eindeutig ein gewisses ebenes Flächenstück  $U$  derart, daß jeder Punkt  $P$  mit Koordinaten  $u^1, u^2$ , der zu  $U$  gehört, vermöge der Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$  in einen Punkt  $X$  des Flächenstücks  $H$  abgebildet wird. Da jeder Punkt von  $B$  durch  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$  in einen Punkt auf  $F$  abgebildet wird, außerdem  $H$  auf  $F$  liegt und die Abbildung eineindeutig ist, ist  $U$  ganz in  $B$  enthalten.

Wir betrachten nun ein kleines gekrümmtes Flächenstück  $dF$  auf  $F$ , das durch die vier Punkte  $X, X_1, X_2, X_{12}$  mit den vier Ortsvektoren  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ ,  $\mathbf{x}(u^1 + du^1, u^2)$ ,  $\mathbf{x}(u^1, u^2 + du^2)$ ,  $\mathbf{x}(u^1 + du^1, u^2 + du^2)$  und durch die durch diese Punkte gehenden Koordinatenlinien bestimmt wird (Bild 4.6). Dem Flächenstück  $dF$  ordnen wir

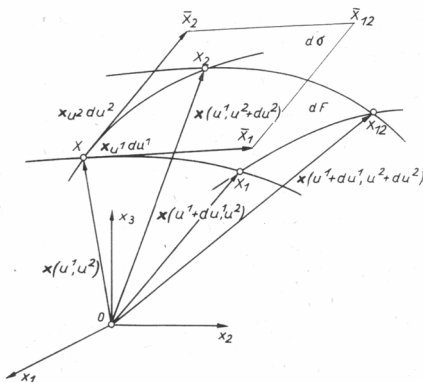


Bild 4.6. Zur Bestimmung des Flächenelements einer gekrümmten Fläche

ein ebenes Flächenstück  $d\sigma$  zu, das durch die zwei Vektoren  $d_1\mathbf{x} = \mathbf{x}_{u^1} du^1$  und  $d_2\mathbf{x} = \mathbf{x}_{u^2} du^2$  gebildet wird, die wir uns vom Punkt  $X$  als gerichtete Strecken angetragen denken, wobei wir die beiden Strecken zum Parallelogramm ergänzen. Das Flächenstück  $d\sigma$  liegt in der Tangentialebene an  $F$  im Punkt  $X$ . Die Flächenstücke  $dF$  und  $d\sigma$  unterscheiden sich, was ihren Inhalt anbetrifft, in Größen, die in  $du^1$  und  $du^2$  von zweiter Ordnung sind. (Flächenstücke wie  $dF$  und  $d\sigma$  nennt man

auch *infinitesimale* Flächenstücke.) Daher kann man  $d\sigma$  an Stelle von  $dF$  als Flächenelement der gekrümmten Fläche benutzen. Wegen eines strengen Beweises dieser Tatsache sei auf das Lehrbuch [6], S. 137, verwiesen, vgl. auch Bd. 5, (6.2.–6.3.). Mit Hilfe des Vektorproduktes der zwei Vektoren  $d_1\mathbf{x}$ ,  $d_2\mathbf{x}$  erhält man

$$d\sigma = |d_1\mathbf{x} \times d_2\mathbf{x}| = |\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}| du^1 du^2. \quad (4.21)$$

Berücksichtigt man die bereits im Abschnitt 4.1.5. verwendete Beziehung

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}| &= \sqrt{(\mathbf{x}_{u^1} \cdot \mathbf{x}_{u^1})(\mathbf{x}_{u^2} \cdot \mathbf{x}_{u^2}) - (\mathbf{x}_{u^1} \cdot \mathbf{x}_{u^2})^2} \\ &= \sqrt{g_{11}g_{22} - (g_{12})^2} = \sqrt{g}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

so ergibt sich für das **Flächenelement**  $d\sigma$

$$d\sigma = \sqrt{g} du^1 du^2. \quad (4.23)$$

Durch Integration über das dem Flächenstück  $H$  entsprechende ebene Flächenstück  $U$  in der  $u^1, u^2$ -Ebene findet man den **Flächeninhalt**  $O(H)$  des gekrümmten Flächenstücks  $H$  nach der Formel

$$O(H) = \int_U \sqrt{g} du^1 du^2. \quad (4.24)$$

- \* **Aufgabe 4.5:** In einer LPG soll ein zylinderförmiger Silo mit kreisförmiger Grundfläche (Radius  $R$ ) errichtet werden, dessen Dach die Gestalt einer Halbkugel hat. Die Dachfläche werde von einem aus dem Innern des Gebäudes kommenden, senkrecht verlaufenden Rohr mit kreisförmigem Querschnitt (Durchmesser  $R$ ) durchsetzt, wobei die gedachte senkrechte Achse des Silos, die durch den Mittelpunkt der Grundfläche geht, zugleich eine Mantellinie des zylindrischen Rohres ist.

Wie groß ist der Flächeninhalt des Daches, wenn man den von dem Rohr durchstoßenen Teil abrechnet?

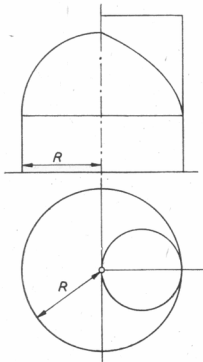


Bild 4.7. Zu Aufgabe 4.5

**Aufgabe 4.6:** Man berechne die Oberfläche eines dreiaxigen Ellipsoids mit den Halbachsen  $a, b, c$  ( $a > b > c$ ) und der Parameterdarstellung \*

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = a \sin u^1 \cos u^2 \mathbf{i} + b \sin u^1 \sin u^2 \mathbf{j} + c \cos u^1 \mathbf{k},$$

$0 \leq u^1 \leq \pi$ ,  $0 \leq u^2 \leq 2\pi$ . In dem entstehenden Doppelintegral läßt sich die Integration nach  $u^1$  exakt ausführen. Es bleibt ein einfaches Integral übrig, das mit Hilfe der Keplerschen Faßregel (vgl. Bd. 2, Satz 10.14) ausgewertet werden soll. Dabei wird die Integration über  $u^2$  von 0 bis  $\pi/2$  erstreckt und das Integral dafür mit dem Faktor 4 multipliziert.

**Aufgabe 4.7:** Das Innere eines zylinderförmigen Gefäßes, das als Grundfläche einen Kreis vom Radius  $r$  hat und dessen Höhe gleich  $h$  ist, wird durch paralleles Licht beleuchtet, so daß der größte Teil des Gefäßbodens im Licht liegt. Das einfallende Licht wird zum Teil an der inneren Gefäßwand reflektiert. Die reflektierten Lichtstrahlen umhüllen eine Zylinderfläche, deren Schnittkurve mit der Grundfläche auf dieser eine besonders helle Linie (*sphärische Kataustik*) bildet. Man bestimme die Gleichung dieser Kurve. \*

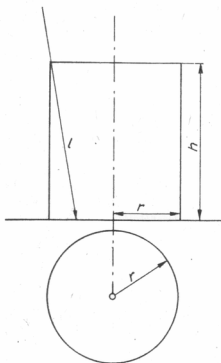


Bild 4.8. Zu Aufgabe 4.7

#### 4.1.8. Koordinatentransformationen

Da sich viele differentialgeometrische Aufgaben nur bei Einführung geeigneter Koordinatensysteme lösen lassen, sollen in diesem Abschnitt Koordinatentransformationen behandelt werden.

$F$  sei eine Fläche mit einer zulässigen Parameterdarstellung  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2)$  der Klasse  $r \geq 1$ , die auf dem einfach zusammenhängenden, beschränkten Gebiet  $B$  der  $u^1, u^2$ -Ebene definiert ist. Jeder der beiden Parameter  $u^1, u^2$  sei eine Funktion zweier anderer Parameter  $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2$ , die rechtwinklige Koordinaten von Punkten einer  $\tilde{u}^1, \tilde{u}^2$ -Ebene sind. Beide Funktionen sollen in ein und demselben einfach zusammen-

hängenden und beschränkten Gebiet  $\bar{B}$  der  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$ -Ebene erklärt und dort auch  $\bar{r}$ -mal ( $\bar{r} \geq 1$ ) stetig nach  $\bar{u}^1$  und  $\bar{u}^2$  differenzierbar sein. Der Wertebereich der Funktionen  $u^1, u^2$  sei so beschaffen, daß durch die zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} u^1 &= u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), \\ u^2 &= u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2) \end{aligned} \quad (4.25)$$

dem Koordinatenpaar  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$  eines jeden Punktes  $\bar{P} \in \bar{B}$  ein Koordinatenpaar  $u^1, u^2$  eines Punktes  $P \in B$  zugeordnet wird. Dabei sollen die Koordinaten jedes Punktes  $P \in B$  unter den Funktionswerten  $u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  vorkommen. Dann ist durch die Gleichungen (4.25) eine Abbildung des Gebietes  $\bar{B}$  auf das Gebiet  $B$  gegeben. Diese Abbildung soll eineindeutig sein. Das heißt, jedem Punkt  $\bar{P} \in \bar{B}$  entspricht vermöge (4.25) ein Punkt  $P \in B$ , und umgekehrt ist jeder Punkt  $P \in B$  der Bildpunkt von genau einem Punkt  $\bar{P} \in \bar{B}$ . Dazu müssen die Gleichungen (4.25) in der Umgebung eines jeden Punktes eindeutig nach  $\bar{u}^1$  und  $\bar{u}^2$  auflösbar sein.

Analytisch ist dies gewährleistet (vgl. Bd. 4, Satz 3.15), wenn für alle Punkte  $\bar{P} \in \bar{B}$  die Funktionaldeterminante

$$D = \frac{\partial(u^1, u^2)}{\partial(\bar{u}^1, \bar{u}^2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \\ \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.26)$$

ist. Es existieren also zwei Funktionen  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$  der Variablen  $u^1, u^2$ , so daß

$$\begin{aligned} \bar{u}^1(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) &= \bar{u}^1, \\ \bar{u}^2(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) &= \bar{u}^2, \\ u^1(\bar{u}^1(u^1, u^2), \bar{u}^2(u^1, u^2)) &= u^1, \\ u^2(\bar{u}^1(u^1, u^2), \bar{u}^2(u^1, u^2)) &= u^2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

gilt. Sind alle diese Bedingungen erfüllt, so nennt man die Gleichungen (4.25) eine **zulässige Koordinatentransformation** der Klasse  $\bar{r}$  auf der Fläche  $F$ . Eine zulässige Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  der Fläche  $F$  geht durch eine zulässige Koordinatentransformation in eine andere zulässige Parameterdarstellung  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  der Fläche  $F$  über. Dabei ist

$$\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = \mathbf{x}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)). \quad (4.28)$$

Um einzusehen, daß  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  zulässig ist, fragen wir, wie sich die Ableitungsvektoren  $\mathbf{x}_{u^1}, \mathbf{x}_{u^2}$  bei einer solchen Koordinatentransformation verhalten. Durch Differentiation von (4.28) ergibt sich

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}^1}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) &= \mathbf{x}_{u^1}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} + \mathbf{x}_{u^2}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}, \\ \bar{\mathbf{x}}_{\bar{u}^2}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) &= \mathbf{x}_{u^1}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \mathbf{x}_{u^2}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Summationskonvention kann man dafür kürzer schreiben

$$\bar{x}_{\bar{u}^{\nu}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) = x_{u^{\mu}}(u^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), u^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) \frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\nu}}, \quad \nu = 1, 2.$$

Verzichtet man darauf, die Abhängigkeit der Vektoren  $\bar{x}_{\bar{u}^{\nu}}$ ,  $x_{u^{\mu}}$  von den Koordinaten  $\bar{u}^1, \bar{u}^2, u^1, u^2$  zu kennzeichnen, so folgt

$$\bar{x}_{\bar{u}^{\nu}} = x_{u^{\mu}} \frac{\partial u^{\mu}}{\partial \bar{u}^{\nu}}, \quad \nu = 1, 2. \quad (4.29)$$

In den Gleichungen (4.29) ist der Index  $\nu$  ein Index, über den nicht summiert wird, der die Werte 1, 2 annehmen kann. Ein solcher Index wird als *freier Index* bezeichnet. Dagegen ist  $\mu$  ein *Summationsindex*. Kommt in einer Gleichung, für die die Summationsvereinbarung gilt, ein freier Index in einem Glied dieser Gleichung als unterer oder oberer Index vor und sind auf derselben oder der anderen Seite noch andere additive Glieder vorhanden, so kommt dieser freie Index bei allen diesen Gliedern als freier Index unten oder oben, und zwar an derselben Stelle wie bei dem ersten Glied vor. Diese Regel ist für  $\nu$  in (4.29) offensichtlich erfüllt, denn  $\nu$  kommt links wie auch rechts als freier Index unten vor.

Durch die Gleichungen (4.29) ist eine lineare Transformation zwischen den Ableitungsvektoren  $x_{u^{\mu}}$  der Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  und den Ableitungsvektoren  $\bar{x}_{\bar{u}^{\nu}}$  der transformierten Parameterdarstellung  $\bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  gegeben. Die Parameterdarstellung ist zulässig, weil aus (4.29) folgt, daß die Ableitungsvektoren  $\bar{x}_{\bar{u}^{\nu}}$  vorhanden sind und stetig von  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$  abhängen und weil die Punkte  $X$  auf  $F$  und die Punkte  $\bar{P} \in \bar{B}$  in eindeutiger Beziehung zueinander stehen. Man nennt zwei zulässige Parameterdarstellungen, die durch eine zulässige Koordinatentransformation nach (4.28) miteinander verknüpft sind, zueinander *äquivalent*<sup>1)</sup>. Die Matrix der linearen Transformation der Vektoren  $x_{u^{\mu}}$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} \\ \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} & \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \end{pmatrix} \quad (4.30)$$

ist wegen (4.26) nicht singulär. Durch Differentiation der Gleichungen (4.27) nach  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$  bzw.  $u^1, u^2$  erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} &= 1, & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} &= 0, & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} &= 1 \quad \text{bzw.} \quad (4.31) \\ \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} &= 1, & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1} &= 0, & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} &= 1, \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Die Menge aller zueinander äquivalenten Parameterdarstellungen bestimmt im  $E^3$  ein und dasselbe Flächenstück.

wofür man bei Anwendung der Summationskonvention auch kürzer schreiben kann

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}^v}{\partial u^\lambda} \frac{\partial u^\lambda}{\partial \bar{u}^\mu} &= \delta_\mu^v, \\ \frac{\partial u^v}{\partial \bar{u}^\lambda} \frac{\partial \bar{u}^\lambda}{\partial u^\mu} &= \delta_\mu^v, \end{aligned} \quad v, \mu = 1, 2. \quad (4.32)$$

Dabei ist

$$\delta_\mu^v = \begin{cases} 0 & \text{für } v \neq \mu, \\ 1 & \text{für } v = \mu \end{cases}$$

das **Kroneckersche Symbol**. Mit Hilfe der Gleichungen (4.31) läßt sich zeigen, daß die Matrix (vgl. Bd. 13)

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} \\ \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \quad (4.33)$$

zur Matrix  $\mathbf{A}$  invers ist. Es gilt  $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{E}$  mit  $\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  als Einheitsmatrix.

Um die Gleichungen (4.29) nach den Vektoren  $\mathbf{x}_{u^\mu}$  aufzulösen, multipliziert man sie mit  $\partial \bar{u}^v / \partial u^\lambda$  und beachtet, daß dann der Index  $v$  einmal unterer und einmal oberer Index ist. Mithin ist  $v$  kein freier Index mehr, sondern ein Summationsindex, und es ist über ihn zu summieren. Man nennt diese Operation *Überschieben* von (4.29) mit  $\partial \bar{u}^v / \partial u^\lambda$ . Es ergibt sich

$$\bar{\mathbf{x}}_{u^\nu} \frac{\partial \bar{u}^v}{\partial u^\lambda} = \mathbf{x}_{u^\mu} \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^v} \frac{\partial \bar{u}^v}{\partial u^\lambda} = \mathbf{x}_{u^\mu} \delta_\lambda^\mu = \mathbf{x}_{u^\lambda}.$$

Ersetzt man noch  $\lambda$  durch  $\mu$ , so erhält man die Auflösung von (4.29) nach  $\mathbf{x}_{u^\mu}$ :

$$\mathbf{x}_{u^\mu} = \bar{\mathbf{x}}_{u^\nu} \frac{\partial \bar{u}^v}{\partial u^\mu}, \quad \mu = 1, 2. \quad (4.34)$$

Ähnlich ist es mit dem Verhalten der Koordinatendifferentiale  $d\bar{u}^v$ ,  $du^\mu$  bei Koordinatentransformationen. Die totalen Differentiale der Funktionen  $\bar{u}^v(u^1, u^2)$ ,  $u^\mu(u^1, u^2)$  sind gegeben durch

$$\begin{aligned} d\bar{u}^v &= \frac{\partial \bar{u}^v}{\partial u^\alpha} du^\alpha, \quad v = 1, 2, \\ du^\mu &= \frac{\partial u^\mu}{\partial \bar{u}^\beta} d\bar{u}^\beta, \quad \mu = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Aus den ersten zwei Gleichungen für  $v = 1, 2$ , liest man ab, daß sich die  $du^\alpha$  mit der Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^1} & \frac{\partial \bar{u}^2}{\partial u^2} \end{pmatrix} \quad (4.36)$$

transformieren.  $\mathbf{B}$  ist invers und transponiert zu  $\mathbf{A}$ .



Man nennt  $\mathbf{B} = (\mathbf{A}^{-1})^T = (\mathbf{A}^T)^{-1} = \mathbf{A}^*$  die zu  $\mathbf{A}$  *kontragrediente* Matrix.

Man bezeichnet alle Größen, die sich mit der Matrix  $\mathbf{A}$  transformieren, als **kovariante** Größen. Insbesondere bezeichnet man die Ableitungsvektoren  $\mathbf{x}_{u^\alpha}$  als kovariante Basisvektoren. Dagegen heißen alle Größen, die sich mit der Matrix  $\mathbf{B}$  transformieren, **kontravariant**. Die Differentiale  $du^\alpha$ ,  $d\tilde{u}^\beta$  können als kontravariante Koordinaten des differentiellen Flächenvektors  $d\mathbf{x}$  aufgefaßt werden, wenn man diesen auf die Basis der Vektoren  $\mathbf{x}_{u^\alpha}$  bzw.  $\mathbf{x}_{\tilde{u}^\beta}$  bezieht. Denn es gilt

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_{u^\alpha} du^\alpha = \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^\beta} d\tilde{u}^\beta.$$

Ein System von Größen  $a^\nu$ , das sich wie die Koordinatendifferentiale transformiert, stellt die kontravarianten Koordinaten eines Flächenvektors  $\mathbf{a}$  dar (vgl. Bd. 11, oder [6], Kapitel 5).

Kovariante Größen sollen stets mit unteren Indizes, kontravariante Größen mit oberen Indizes gekennzeichnet werden.

Nun findet man leicht, wie sich die Koeffizienten  $g_{\nu\mu}$  der ersten Grundform bei einer zulässigen Koordinatentransformation verhalten. Es ist

$$\tilde{g}_{\nu\mu} = \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^\nu} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^\mu},$$

und wegen

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^\nu} = \mathbf{x}_{u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\nu}, \quad \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^\mu} = \mathbf{x}_{u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^\mu}$$

ergibt sich

$$\tilde{g}_{\nu\mu} = \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^\nu} \cdot \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^\mu} = \left( \mathbf{x}_{u^\alpha} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\nu} \right) \cdot \left( \mathbf{x}_{u^\beta} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^\mu} \right) = (\mathbf{x}_{u^\alpha} \cdot \mathbf{x}_{u^\beta}) \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\nu} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^\mu},$$

und mit  $\mathbf{x}_{u^\alpha} \cdot \mathbf{x}_{u^\beta} = g_{\alpha\beta}$  erhält man

$$\tilde{g}_{\nu\mu} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \tilde{u}^\nu} \frac{\partial u^\beta}{\partial \tilde{u}^\mu}, \quad \nu, \mu = 1, 2. \quad (4.37)$$

Ein System von Größen, das sich so transformiert wie die  $g_{\alpha\beta}$ , bildet einen zweifach kovarianten Tensor oder **kovarianten Tensor zweiter Stufe**.

Schließlich soll noch angegeben werden, wie sich der Flächennormalenvektor  $\mathbf{f}$  transformiert. Beachtet man die Beziehungen

$$\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^1} \times \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^2} = (\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}) D,$$

$$\tilde{g} = \tilde{g}_{11}\tilde{g}_{22} - (\tilde{g}_{12})^2 = |\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^1} \times \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^2}|^2 = |\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}|^2 D^2 = gD^2$$

mit

$$D = \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^1} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^2} - \frac{\partial u^1}{\partial \tilde{u}^2} \frac{\partial u^2}{\partial \tilde{u}^1},$$

so folgt

$$\tilde{\mathbf{f}} = \frac{\tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^1} \times \tilde{\mathbf{x}}_{\tilde{u}^2}}{\sqrt{\tilde{g}}} = \mathbf{f} \frac{D}{|D|}. \quad (4.38)$$

Es ist  $\tilde{\mathbf{f}} = \pm \mathbf{f}$ , wobei das Pluszeichen gilt, wenn  $D > 0$  und das Minuszeichen, wenn  $D < 0$  ist.

Betrachtet man die Matrix

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}$$

der Größen  $g_{\nu\mu}$  und bildet die dazu inverse Matrix

$$\mathbf{G}^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11} & g^{12} \\ g^{21} & g^{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{22}/g & -g_{12}/g \\ -g_{12}/g & g_{11}/g \end{pmatrix},$$

so ergeben sich aus der Beziehung  $\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1} = \mathbf{G}^{-1}\mathbf{G} = \mathbf{E}$  die Gleichungen

$$\begin{aligned} g_{\nu\mu} g^{\mu\lambda} &= \delta_{\nu}^{\lambda}, \\ g^{\nu\lambda} g_{\lambda\mu} &= \delta_{\mu}^{\nu}, \quad \nu, \mu = 1, 2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Die Größen  $g^{\nu\mu}$  werden kontravariante Maßzahlen (Komponenten) des metrischen Tensors genannt. Ihr Transformationsgesetz lautet

$$\bar{g}^{\nu\mu} = g^{\alpha\beta} \frac{\partial \bar{u}^{\nu}}{\partial u^{\alpha}} \frac{\partial \bar{u}^{\mu}}{\partial u^{\beta}}, \quad \nu, \mu = 1, 2, \quad (4.40)$$

und charakterisiert einen **kontravarianten Tensor zweiter Stufe**.

Die Flächentheorie findet Anwendungen in der mathematischen Geographie bei den Kartenentwürfen (vgl. [15], Bd. I und II). In konsequenter Verallgemeinerung wurde die Flächentheorie zur Theorie der *Riemannschen Räume* weiterentwickelt. Man kann nämlich eine gekrümmte Fläche im dreidimensionalen euklidischen Raum als zweidimensionalen Riemannschen Raum auffassen. Zu jedem Punkt dieses Riemannschen Raumes existiert dann ein System von Basisvektoren  $\mathbf{x}_{\mu}^1, \mathbf{x}_{\mu}^2$ , die den Tangentialraum des Riemannschen Raumes aufspannen. Durch die erste Grundform wird dann die Metrik in diesem Riemannschen Raum bestimmt. Diese Überlegungen lassen sich auch auf höherdimensionale Räume ausdehnen und haben Anwendungen in der Relativitätstheorie gefunden. Die Flächentheorie führte auch zur Entdeckung *nichteuklidischer Geometrien*. So wurde von dem russischen Mathematiker Lobatschewski und etwas später von Bolyai, auch schon von Gauß, eine nichteuklidische Geometrie begründet, die man heute als Lobatschewskische oder hyperbolische Geometrie bezeichnet. Zweidimensionale Modelle dieser Geometrie lassen sich auf den Flächen konstanten negativen Gaußschen Krümmungsmaßes angeben und sind seit langem bekannt (vgl. [11] und [6], S. 342). Eine solche Fläche entsteht z. B. dadurch, daß man die in 3.3. behandelte Schleppekurve um die  $x$ -Achse rotieren läßt. Sie heißt *Pseudosphäre*.

## 4.2. Die Krümmungstheorie der Flächen und Flächenkurven

### 4.2.1. Die zweite Grundform der Flächentheorie

Wir betrachten eine Fläche  $F$  mit einer zulässigen Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  von der Klasse  $r \geq 2$ . Auf dieser Fläche sei eine Kurve  $c$  durch  $u^1 = u^1(t), u^2 = u^2(t)$  mit  $t_1 \leq t \leq t_2$  gegeben.  $X$  sei ein beliebiger Punkt der Kurve  $c$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(u^1(t), u^2(t))$ . Bezeichnen wir den normierten Tangentenvektor von  $c$  in  $X$  mit  $\mathbf{t}$  und den zugehörigen Hauptnormalenvektor mit  $\mathbf{n}$ , so erhalten wir durch Differentiation von  $\mathbf{x}(t)$  nach  $t$  zunächst

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}_{\mu} \dot{u}^{\mu}. \quad (4.41)$$

Differenziert man  $\mathbf{x}(t)$  jedoch nach  $s$ , so ergibt sich

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \frac{dt}{ds} = \dot{\mathbf{x}} \frac{dt}{ds} = \mathbf{x}_{u^v} \dot{u}^v \frac{dt}{ds}. \quad (4.42)$$

Die Gleichung (4.42) besagt, daß der Tangentenvektor  $\mathbf{t}$  sich durch Linearkombination aus den die Tangentialebene  $\tau_X$  aufspannenden Vektoren  $\mathbf{x}_{u^1}, \mathbf{x}_{u^2}$  ergibt. Das heißt, daß die durch den Punkt  $X$  und den Vektor  $\mathbf{t}$  bestimmte Kurventangente  $t_X$  in der zu  $X$  gehörigen Tangentialebene  $\tau_X$  der Fläche liegt. Die Gerade  $t_X$  berührt daher auch die Fläche  $F$  im Punkt  $X$ . Aus (4.42) folgt durch nochmalige Differentiation nach  $s$

$$\mathbf{t}' = \mathbf{x}_{u^v\mu} \dot{u}^v \dot{u}^\mu \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \mathbf{x}_{u^v} \ddot{u}^v \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \mathbf{x}_{u^v} \dot{u}^v \left( \frac{d^2t}{ds^2} \right).$$

Bei Berücksichtigung der 1. Frenetschen Formel (2.45)  $\mathbf{t}' = \kappa \mathbf{n}$  findet man

$$\kappa \mathbf{n} = \mathbf{x}_{u^v\mu} \dot{u}^v \dot{u}^\mu \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \mathbf{x}_{u^v} \ddot{u}^v \left( \frac{dt}{ds} \right)^2 + \mathbf{x}_{u^v} \dot{u}^v \left( \frac{d^2t}{ds^2} \right).$$

Multipliziert man diese Gleichung skalar mit dem zum Punkt  $X$  gehörigen Flächennormalenvektor  $\mathbf{f}$ , so ergibt sich wegen  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_{u^v} = 0$  die Gleichung

$$\kappa(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_{u^v\mu}) \dot{u}^v \dot{u}^\mu \left( \frac{dt}{ds} \right)^2. \quad (4.43)$$

Durch  $\mathbf{f}$  und  $X$  wird die zu  $X$  gehörige Flächennormale  $f_X$  festgelegt. Die Geraden  $t_X$  und  $f_X$  spannen ihrerseits eine Ebene  $\nu$  auf, die die Fläche  $F$  in einer ebenen Kurve  $c_\nu$  schneidet. Da die Ebene  $\nu$  den Punkt  $X$  enthält, geht die Kurve  $c_\nu$  durch  $X$ . Die Gerade  $t_X$  liegt in  $\nu$  und ist auch Tangente an die Kurve  $c_\nu$  im Punkt  $X$ . Wäre dies nicht der Fall, so würde  $t_X$  die Kurve  $c_\nu$  und damit auch die Fläche  $F$  im Punkt  $X$  durchsetzen. Das letztere ist aber nicht möglich, weil  $t_X$  die Fläche  $F$  im Punkt  $X$  berührt. Man nennt  $c_\nu$  den zur Tangente  $t_X$  gehörenden *Normalschnitt* der Fläche  $F$  im Punkt  $X$ ,  $\nu$  eine *Normalschnittebene* (Bild 4.10).

Der Vektor  $\mathbf{n}$  bestimmt die Richtung der Hauptnormale  $n_X$  der Kurve  $c$  in  $X$ . Auf  $n_X$  liegt der Krümmungsmittelpunkt  $M_c$  von  $c$ . Sein Abstand von  $X$  ist gleich dem Krümmungsradius  $\varrho$  der Kurve  $c$  in  $X$ :

$$\varrho = \overline{XM_c}.$$

Auf der Flächennormalen  $f_X$  liegt der Krümmungsmittelpunkt  $M$  des Normalschnittes  $c_\nu$ . Es gilt  $R = \overline{XM}$ , wobei  $R$  der Krümmungsradius des Normalschnittes  $c_\nu$  in  $X$  ist. Bezeichnet  $\gamma$  den Winkel zwischen der Normalschnittebene  $\nu$  und der Schmiegenebene  $\sigma_X$  der Kurve  $c$  in  $X$ , der zugleich auch der Winkel zwischen  $\mathbf{f}$  und  $\mathbf{n}$  ist, so folgt

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} = \cos \gamma.$$

Man setzt zur Abkürzung  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_{u^v\mu} = b_{v\mu}$  und erhält mit  $\mathbf{f} = \frac{\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}}{\sqrt{g}}$  die Gleichungen

$$b_{v\mu} = \frac{(\mathbf{x}_{u^1} \times \mathbf{x}_{u^2}) \cdot \mathbf{x}_{u^v\mu}}{\sqrt{g}}, \quad v, \mu = 1, 2. \quad (4.44)$$

Offensichtlich gilt  $b_{\nu\mu} = b_{\mu\nu}$ . Aus  $\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_{u^\nu} = 0$  findet man durch Differentiation nach  $u^\mu$

$$\mathbf{f}_{u^\mu} \cdot \mathbf{x}_{u^\nu} + \mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_{u^\nu u^\mu} = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$b_{\nu\mu} = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{x}_{u^\nu u^\mu}) = -(\mathbf{f}_{u^\mu} \cdot \mathbf{x}_{u^\nu}). \quad (4.45)$$

Aus (4.43) und (4.45) berechnet man mit Hilfe der ersten Grundform  $\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{\lambda\tau} \dot{u}^\lambda \dot{u}^\tau$  durch Einsetzen

$$\kappa \cos \gamma = \frac{b_{\nu\mu} \dot{u}^\nu \dot{u}^\mu}{g_{\lambda\tau} \dot{u}^\lambda \dot{u}^\tau}. \quad (4.46)$$

Mit  $du^\nu = \dot{u}^\nu dt$ ,  $du^\mu = \dot{u}^\mu dt$ ,  $du^\lambda = \dot{u}^\lambda dt$  und  $du^\tau = \dot{u}^\tau dt$  folgt aus (4.46) bei Erweiterung der rechten Seite von (4.46) mit  $(dt)^2$

$$\kappa \cos \gamma = \frac{b_{\nu\mu} du^\nu du^\mu}{g_{\lambda\tau} du^\lambda du^\tau}. \quad (4.47)$$

Die quadratische Differentialform im Zähler von (4.47) heißt **zweite Grundform** der Flächentheorie und wird mit  $II$  bezeichnet:

$$II = b_{\nu\mu} du^\nu du^\mu. \quad (4.48)$$

Führt man die Summation über  $\nu$  und  $\mu$  aus, so lautet die zweite Grundform

$$II = b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22}(du^2)^2.$$

Beachtet man die Beziehungen  $dx = \mathbf{x}_{u^\nu} du^\nu$ ,  $d\mathbf{f} = \mathbf{f}_{u^\mu} du^\mu$  und (4.45), so kann man schreiben

$$I = (ds)^2 = dx \cdot dx \quad (4.49)$$

und

$$II = dx \cdot (-d\mathbf{f}) = -(\mathbf{x}_{u^\nu} \cdot \mathbf{f}_{u^\mu}) du^\nu du^\mu = b_{\nu\mu} du^\nu du^\mu. \quad (4.50)$$

#### 4.2.2. Elliptisch, hyperbolisch und parabolisch gekrümmte Flächenstücke

Setzt man die zweite Grundform gleich null, so erhält man die Differentialgleichung

$$b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22}(du^2)^2 = 0. \quad (4.51)$$

Falls  $b_{22} \neq 0$  ist, findet man daraus

$$\left(\frac{du^2}{du^1}\right)_{1,2} = \frac{1}{b_{22}} (-b_{12} \pm \sqrt{(b_{12})^2 - b_{11}b_{22}}). \quad (4.52)$$

Es gibt daher im allgemeinen in jedem Punkt einer Fläche zwei Tangentenrichtungen  $du_{(1)}^2 : du_{(1)}^1$  und  $du_{(2)}^2 : du_{(2)}^1$ , für die die zweite Grundform verschwindet. Diese beiden Tangentenrichtungen heißen die *Asymptotenrichtungen* im Punkt  $X$  der Fläche. Sie können auch imaginär werden.

Im folgenden werde vorausgesetzt, daß die Größen  $b_{11}$ ,  $b_{12}$  und  $b_{22}$  nicht alle gleichzeitig verschwinden bzw. daß  $X$  kein parabolischer Nabelpunkt (vgl. 4.2.4.) ist. Ebenso soll  $X$  auch kein Punkt sein, in dem die Größen  $b_{\nu\mu}$  unbestimmt werden. Wir setzen

$$b = b_{11}b_{22} - (b_{12})^2.$$

Ist  $b < 0$ , so gibt es, weil der Ausdruck unter der Quadratwurzel in (4.52) dann positiv ist, zwei verschiedene reelle Asymptotenrichtungen in  $X$ . Die Fläche heißt im Punkt  $X$  hyperbolisch gekrümmt und  $X$  wird als **hyperbolischer Punkt** der Fläche bezeichnet (vgl. Bild 4.9b)).

Ist dagegen  $b > 0$ , so gibt es keine reellen Asymptotenrichtungen in  $X$ . Die Fläche heißt im Punkt  $X$  elliptisch gekrümmt und  $X$  wird als **elliptischer Flächenpunkt** bezeichnet (vgl. Bild 4.9a)).

Ist schließlich  $b = 0$ , so gibt es nur eine Asymptotenrichtung, die zugleich reell ist, und die Fläche nennt man im Punkt  $X$  parabolisch gekrümmt.  $X$  heißt **parabolischer Punkt** der Fläche (vgl. Bild 4.9c)).

Auch im Fall  $b_{22} = 0$  bleiben diese Ergebnisse bestehen. Aus  $b_{22} = 0$  folgt nämlich  $b = -(b_{12})^2$ . Falls nun  $b_{12} \neq 0$  ist, hat man  $b < 0$  und aus (4.51) ergibt sich  $(b_{11} du^1 + 2b_{12} du^2) du^1 = 0$ , woraus  $b_{11} du^1 + 2b_{12} du^2 = 0$  und  $du^1 = 0$  folgt. Man erhält, wenn  $b_{22} = 0$  ist, im Fall  $b < 0$  zwei verschiedene reelle Asymptotenrichtungen  $du^2 : du^1 = b_{11} : -2b_{12}$  und  $du^2 : du^1 = 1 : 0$ . Ist jedoch außer  $b_{22} = 0$  auch noch  $b_{12} = 0$ , so gilt  $b = 0$ , und aus (4.51) folgt  $b_{11}(du^1)^2 = 0$ . Da  $X$  kein parabolischer Nabelpunkt sein soll, ist  $b_{11} \neq 0$ , und man findet eine reelle Asymptotenrichtung, die durch  $du^1 = 0$  gegeben ist. Die Fläche ist in  $X$  parabolisch gekrümmt. Eine Flächenkurve, die in jedem ihrer Punkte eine Tangente besitzt, deren Richtung mit einer Asymptotenrichtung in diesem Punkt übereinstimmt, heißt Asymptotenlinie der Fläche. Eine reelle *Asymptotenlinie* kann nur hyperbolische und parabolische Punkte der Fläche enthalten. Gleichung (4.51) ist die Differentialgleichung der Asymptotenlinien einer Fläche. Auf einem Flächenstück, das aus lauter hyperbolischen Punkten besteht, existieren zwei Scharen von Asymptotenlinien. Werden diese Asymptotenlinien als Koordinatenlinien gewählt, so ist  $b_{11} = b_{22} = 0$ . Dies ergibt sich daraus, daß die Kurven  $u^1 = \text{konstant}$  und  $u^2 = \text{konstant}$  die Differentialgleichung (4.51) erfüllen müssen.

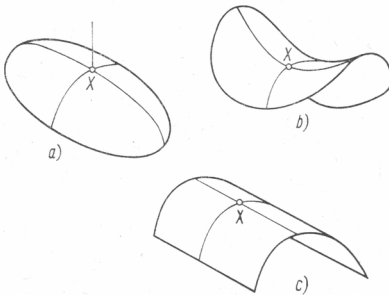


Bild 4.9. Zur Krümmung von Flächen

Als Beispiel soll eine Torusfläche behandelt werden, die durch Rotation eines Kreises um die  $x_3$ -Achse entsteht. Der Kreis liege in der  $x_1, x_3$ -Ebene, sein Mittelpunkt  $M$  auf der  $x_1$ -Achse habe die Koordinaten  $x_1 = R$ ,  $x_2 = x_3 = 0$ , und sein Radius sei  $r$ . Wenn sich der Kreis um die  $x_3$ -Achse ein Stück gedreht hat, so bildet seine Ebene mit der  $x_1, x_3$ -Ebene den Winkel  $u^1$ . Hat sich der Winkel  $u^1$  von 0 bis  $2\pi$  verändert, so hat die Kreisebene eine volle Umdrehung um die  $x_3$ -Achse vollführt. Dabei erzeugt der Kreis eine Torusfläche. Es sei  $R > r$ . Mit  $u^2$  werde der Winkel bezeichnet, den der zu einem beliebigen Punkt  $X$  des Kreises führende Radius  $MX$  mit dem Radius  $MX_0$  bildet, wobei  $X_0$  derjenige Punkt des Kreises ist, der in der  $x_1, x_2$ -Ebene liegt und von  $O$  den Abstand  $R + r$  hat. Der Winkel  $u^2$  werde vom Radius  $MX_0$  nach oben im mathematisch positiven Drehsinn (Blickrichtung: von der negativen  $x_2$ -Achse auf die  $x_1, x_3$ -Ebene) gezählt. Die Parameterdarstellung der Torusfläche lautet:

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{i}(R + r \cos u^2) \cos u^1 + \mathbf{j}(R + r \cos u^2) \sin u^1 + \mathbf{k}r \sin u^2$$

mit

$$0 \leq u^1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq u^2 \leq 2\pi.$$

Für die Koeffizienten  $g_{\nu\mu}$  erhält man

$$g_{11} = (R + r \cos u^2)^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = r^2, \quad g = (R + r \cos u^2)^2 r^2.$$

Der Flächennormalenvektor  $\mathbf{f}$  ist gegeben durch

$$\mathbf{f} = \mathbf{i} \cos u^1 \cos u^2 + \mathbf{j} \sin u^1 \cos u^2 + \mathbf{k} \sin u^2.$$

Daraus ergibt sich für die Größen  $b_{\nu\mu}$

$$b_{11} = -(R + r \cos u^2) \cos u^2, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = -r,$$

$$b = (R + r \cos u^2) r \cos u^2.$$

Für  $0 \leq u^2 < \pi/2$ ,  $3\pi/2 < u^2 \leq 2\pi$  und  $u^1$  beliebig erhält man elliptische Flächenpunkte, für  $\pi/2 < u^2 < 3\pi/2$ ,  $u^1$  beliebig ergeben sich hyperbolische Flächenpunkte und für  $u^2 = \pi/2$  bzw.  $u^2 = 3\pi/2$ ,  $u^1$  beliebig findet man parabolische Punkte der Fläche. Die Koordinatenlinien  $u^1 = k$ ,  $u^2 = c$  bilden ein orthogonales Netz. Die  $u^1$ -Linien sind die Breitenkreise, die  $u^2$ -Linien sind ebenfalls Kreise, die alle zueinander kongruent sind und sich als Schnitt einer durch die  $x_3$ -Achse begrenzten Halbebene mit der Torusfläche ergeben.

#### 4.2.3. Der Satz von Meusnier

Aus der Gleichung (4.47)

$$\kappa \cos \gamma = \frac{b_{\nu\mu} du^\nu du^\mu}{g_{\lambda\tau} du^\lambda du^\tau} = \frac{II}{I} \quad (4.53)$$

lassen sich einige wichtige Folgerungen ziehen. Zunächst gilt der

**S.4.2 Satz 4.2:** *Alle Kurven der Klasse  $r \geq 2$  auf einer Fläche  $F$ , die durch ein und denselben Flächenpunkt  $X$  gehen und in  $X$  dieselbe Tangente und die gleiche (von der Tangentialebene  $\tau_X$  verschiedene) Schmiegenebene besitzen, haben im Punkt  $X$  auch die gleiche Krümmung.*

**Beweis:** In der Gleichung (4.53) hängt die rechte Seite, wenn man  $X$  als fest ansieht, nur vom Verhältnis  $du^2 : du^1$ , d. h. von der Richtung der gemeinsamen Tangente  $t_X$  der Flächenkurve  $c$  und des zu dieser Tangente gehörigen Normalschnitts  $c_\perp$ , ab. Für alle Flächenkurven, die  $t_X$  in  $X$  berühren, ist daher der Wert des Produktes  $\kappa \cos \gamma$  derselbe. Für solche Flächenkurven, die in  $X$  die Tangente  $t_X$  und die Schmiegenebene  $\sigma_X$  gemeinsam haben, ist auch der Winkel  $\gamma$  zwischen Schmiegenebene und

Normalschnittebene der gleiche. Folglich haben diese Kurven in  $X$  auch die gleiche Krümmung. Dabei darf aber die Schmiegeebene  $\sigma_X$  nicht mit der Tangentialebene  $\tau_X$  zusammenfallen. In diesem Fall ist  $\gamma = \pi/2$ , und aus  $\kappa_1 \cos(\pi/2) = \kappa_2 \cos(\pi/2) = 0$  darf nicht auf  $\kappa_1 = \kappa_2$  geschlossen werden. Wählt man die Flächenkurve  $c$  so, daß sie  $t_X$  in  $X$  berührt und ihre Schmiegeebene  $\sigma_X$  mit der Normalschnittebene  $\nu$  zusammenfällt, so ist  $\gamma = 0$ , und die Krümmung  $\kappa$  der Kurve  $c$  stimmt mit der Krümmung  $\kappa_N$  des Normalschnitts  $c_\nu$  in  $X$  überein. Die Größe  $\kappa_N$  heißt auch **Normalkrümmung**. Aus (4.53) folgt

$$\kappa_N = \frac{b_{\nu\mu} du^\nu du^\mu}{g_{\lambda\tau} du^\lambda du^\tau} = \frac{II}{I} = \frac{1}{R}. \quad (4.54)$$

Die Normalkrümmung  $\kappa_N$  ist der Quotient aus zweiter und erster Grundform. Sie ist abhängig vom betrachteten Flächenpunkt und von der Tangentenrichtung des Normalschnitts. Aus den Gleichungen (4.53) und (4.54) folgt

$$\kappa \cos \gamma = \kappa_N \quad (4.55)$$

oder bei Einführung der Krümmungsradien  $\varrho$  und  $R$

$$\frac{\cos \gamma}{\varrho} = \frac{1}{R}. \quad (4.56)$$

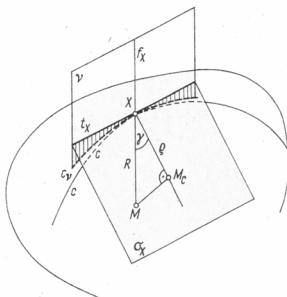


Bild 4.10. Zum Satz von Meusnier

Die Beziehung (4.55) bzw. (4.56) wird als Satz von Meusnier<sup>1)</sup> bezeichnet. Man kann ihn auch in der folgenden Form aussprechen.

**Satz 4.3 (Satz von Meusnier):** Es sei  $X$  ein beliebiger Punkt einer Fläche  $F$ ,  $t_X$  eine Tangente, die  $F$  in  $X$  berührt und deren Richtung nicht mit einer Asymptotenrichtung des Punktes  $X$  übereinstimmt. Der zur Tangente  $t_X$  gehörige Normalschnitt  $c$ , durch den Punkt  $X$  der Fläche  $F$  habe den Krümmungsmittelpunkt  $M$  und den Krümmungsradius  $R = \overline{MX}$ . Dann liegen die Krümmungsmittelpunkte aller Flächenkurven  $c$ , die  $c$ , in  $X$  berühren, auf einem Kreis mit dem Durchmesser  $MX$ , der der gemeinsamen Normalenebene aller dieser Kurven angehört. S.4.3

<sup>1)</sup> Jean Baptiste Maria Charles Meusnier (1754 bis 1793), französischer Mathematiker.

#### 4.2.4. Hauptkrümmungen und Krümmungslinien

$F$  sei eine Fläche, die durch eine Parametendarstellung  $x(u^1, u^2)$  von der Klasse  $r \geq 2$  gegeben ist. Auf  $F$  werden im Punkt  $X$  sämtliche Tangenten  $t_X$  an die Fläche betrachtet. Jede dieser Tangenten bestimmt mit der Flächennormale  $f_X$  in  $X$  eine Normalschnittebene  $v$ , die die Fläche  $F$  in einem Normalschnitt  $c_v$  schneidet. Die Krümmung  $\kappa_N$  im Punkt  $X$  eines solchen Normalschnittes hängt, wenn man  $X$  als fest ansieht, nur noch von der Richtung der Tangente  $t_X$  ab. Diese aber ist durch das Verhältnis  $du^2 : du^1$  bestimmt. Setzen wir  $du^2/du^1 = \lambda$ , so ergibt sich aus (4.54)

$$\kappa_N(\lambda) = \frac{b_{11} + 2b_{12}\lambda + b_{22}\lambda^2}{g_{11} + 2g_{12}\lambda + g_{22}\lambda^2}. \quad (4.57)$$

Bei festgehaltenem  $X$  hängt die rechte Seite dieses Ausdrucks i. allg. allein von  $\lambda$  ab. Eine Ausnahme tritt nur in solchen Punkten  $X$  ein, wo die Größen  $b_{\nu\mu}$  und  $g_{\nu\mu}$  zueinander proportional sind bzw. wo  $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$  ist. Im ersten Fall gilt  $b_{\nu\mu} = C(u^1, u^2) g_{\nu\mu}$ , und daraus folgt, daß  $\kappa_N = C(u^1, u^2)$  unabhängig von  $\lambda$  ist. Einen solchen Punkt  $X$  nennt man **elliptischen Nabelpunkt** der Fläche. Im zweiten Fall ist  $\kappa_N = 0$  und ebenfalls unabhängig von  $\lambda$ . Dann heißt  $X$  ein **parabolischer Nabelpunkt** der Fläche. Nehmen wir an, daß  $X$  weder ein elliptischer noch ein parabolischer Nabelpunkt, sondern ein regulärer Punkt der Fläche ist. Dann ist der Nenner in (4.57) stets positiv und  $\kappa_N(\lambda)$  bleibt endlich, auch wenn  $\lambda \rightarrow \infty$  strebt. Man kann immer annehmen, daß es Funktionswerte  $\kappa_N(\lambda)$  gibt, die größer und solche, die kleiner als der Grenzwert  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \kappa_N(\lambda)$  sind. Das läßt sich immer durch eine geeignete

Wahl des  $u^1, u^2$ -Koordinatensystems auf der Fläche erreichen. Da  $\kappa_N$  eine stetige, ja sogar differenzierbare Funktion von  $\lambda$  ist, die zudem für alle endlichen  $\lambda$  endliche Funktionswerte  $\kappa_N(\lambda)$ , für  $\lambda \rightarrow \infty$  einen endlichen Grenzwert hat, der nach Voraussetzung zwischen zwei endlichen Funktionswerten liegt, gibt es unter diesen Funktionswerten mindestens einen größten und einen kleinsten. Die Funktion  $\kappa_N$  besitzt also ein absolutes Maximum und ein absolutes Minimum. Diese absoluten Extremwerte sind auch zugleich relative Extremwerte und lassen sich aus der Gleichung

$$\frac{d\kappa_N(\lambda)}{d\lambda} = 0 \quad (4.58)$$

ermitteln. Nach Beseitigung des in der Gleichung (4.58) bei Ausführung der Differentiation auftretenden Nenners  $(g_{11} + 2g_{12}\lambda + g_{22}\lambda^2)^2$  erhält man, wenn man noch nach Potenzen von  $\lambda$  ordnet,

$$(g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12})\lambda^2 + (g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11})\lambda + (g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11}) = 0. \quad (4.59)$$

Da diese Gleichung quadratisch in  $\lambda$  ist, hat sie nur zwei Lösungen, und daher hat die Funktion  $\kappa_N$  genau ein Maximum und genau ein Minimum. Sind  $\lambda_1, \lambda_2$  diese Lösungen, so bezeichnet man die durch  $\lambda_1 = du^2_1/du^1_1$  und  $\lambda_2 = du^2_2/du^1_2$  gegebenen Tangentenrichtungen als **Hauptkrümmungsrichtungen** im Punkt  $X$ . Es gilt nun der

**S.4.4 Satz 4.4:** Die Lösungen  $\lambda_1, \lambda_2$  der Gleichung (4.59) sind stets reell und verschieden, wenn  $X$  ein regulärer Flächenpunkt ist.

**Beweis:** Wir betrachten die Größen  $A_i = g_{22}\lambda_i + g_{12}$  ( $i = 1, 2$ ). Dann ist deren Summe  $A_1 + A_2 = g_{22}(\lambda_1 + \lambda_2) + 2g_{12} = m$  sicher reell, weil  $\lambda_1 + \lambda_2 = -p/q$  mit



$p = g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11}$ ,  $q = g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12}$  reell ist. Für das Produkt  $A_1A_2$  findet man

$$A_1A_2 = g_{22}[g_{22}\lambda_1\lambda_2 + g_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) + g_{11}] - (g_{11}g_{22} - (g_{12})^2).$$

Setzt man  $\lambda_1\lambda_2 = r/q$  mit  $r = g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11}$  und  $\lambda_1 + \lambda_2 = -p/q$  in diese Gleichung ein, so verschwindet der Ausdruck in der eckigen Klammer. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} & g_{22}\lambda_1\lambda_2 + g_{12}(\lambda_1 + \lambda_2) + g_{11} \\ &= g_{22} \frac{g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11}}{q} - g_{12} \frac{g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11}}{q} + g_{11} \frac{g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12}}{q} \\ &= \frac{1}{q} \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}$$

Die Determinante ist gleich null, weil zwei ihrer Zeilen gleich sind. Daher findet man  $A_1A_2 = -g$ . Da  $g = g_{11}g_{22} - (g_{12})^2$  in einem regulären Punkt  $X$  der Fläche stets positiv ist, hat das Produkt  $A_1 \cdot A_2$  negatives Vorzeichen. Die Größen  $A_1, A_2$  genügen der Gleichung  $A^2 - mA - g = 0$ . Daher ergibt sich  $A_{1,2} = m/2 \pm \sqrt{g + m^2/4}$ . Wegen  $g > 0$  sind  $A_1$  und  $A_2$  stets reell und verschieden. Aus  $A_i = g_{22}\lambda_i + g_{12}$  ( $i = 1, 2$ ) folgt dann, daß auch  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  reell und verschieden sind. In jedem Punkt  $X$  der Fläche existieren somit zwei verschiedene reelle Hauptkrümmungsrichtungen.

Wir betrachten nun solche Flächenkurven, bei denen in jedem ihrer Punkte die Richtung der Kurventangente mit einer Hauptkrümmungsrichtung übereinstimmt. Diese Kurven werden als **Krümmungslinien** der Fläche bezeichnet. Setzt man für  $\lambda$  in (4.59) den Ausdruck  $du^2/du^1$  ein und multipliziert die Gleichung mit dem Nenner  $(du^1)^2$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} & (g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12})(du^2)^2 + (g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11})du^1du^2 \\ & + (g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11})(du^1)^2 = 0. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Dies ist die Differentialgleichung der Krümmungslinien. Löst man sie nach  $du^2/du^1$  auf, so erhält man zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\frac{du^2}{du^1} = -\frac{p}{2q} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4q^2} - \frac{r}{q}}.$$

Jede von ihnen besitzt als Lösungskurven eine einparametrische Kurvenschar. Um die Natur dieser Kurven besser zu erkennen, soll das  $u^1, u^2$ -Koordinatensystem so gewählt werden, daß die Krümmungslinien Koordinatenlinien sind. Dann sind  $u^1 = C_1$  und  $u^2 = C_2$  Lösungen der Differentialgleichung (4.60). Es gilt daher

$$(g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12})(du^2)^2 = 0 \quad \text{und} \quad (g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11})(du^1)^2 = 0.$$

Da für die erste Gleichung  $du^2 \neq 0$  und für die zweite  $du^1 \neq 0$  ist, folgt

$$\begin{aligned} & b_{22}g_{12} - g_{22}b_{12} = 0, \\ & b_{11}g_{12} - g_{11}b_{12} = 0. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Diese zwei Gleichungen kann man als ein homogenes lineares Gleichungssystem für die Unbekannten  $g_{12}$ ,  $b_{12}$  auffassen. Da  $X$  kein Nabelpunkt sein soll, ist die Determinante  $g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11}$  nicht null. Daher hat das System (4.61) nur die triviale Lösung  $g_{12} = b_{12} = 0$ . Aus  $g_{12} = 0$  folgt aber, daß die Koordinatenlinien und damit die Krümmungslinien ein orthogonales Kurvennetz auf der Fläche bilden. Demnach stehen die zu jedem Punkt der Fläche gehörigen zwei Hauptkrümmungsrichtungen aufeinander senkrecht.

*Liegt umgekehrt ein Gaußsches Koordinatensystem auf einer Fläche vor und ist überall in dessen Gültigkeitsbereich  $g_{12} = 0$  und  $b_{12} = 0$ , so sind die Koordinatenlinien dieses Systems die Krümmungslinien der Fläche.*

**Beweis:** Wegen  $g_{12} = b_{12} = 0$  hat die Differentialgleichung (4.60) der Krümmungslinien die Lösungen  $u^1 = \text{konstant}$  und  $u^2 = \text{konstant}$ . Das heißt aber, daß die Koordinatenlinien die Lösungskurven von (4.60) sind. Mithin sind die Koordinatenlinien zugleich die Krümmungslinien der Fläche.

Schließlich sollen noch die Hauptkrümmungen  $\kappa_1, \kappa_2$  berechnet werden.<sup>1)</sup> Dazu wird die Gleichung (4.57) mit dem in ihr auftretendem Nenner multipliziert und nach Potenzen von  $\lambda$  geordnet. Man erhält mit  $\kappa = \kappa_N$

$$(b_{22} - \kappa g_{22})\lambda^2 + 2(b_{12} - \kappa g_{12})\lambda + (b_{11} - \kappa g_{11}) = 0. \quad (4.62)$$

Für  $\lambda = \lambda_1$  bzw.  $\lambda = \lambda_2$  nimmt  $\kappa$  jeweils einen Extremwert  $\kappa_1$  bzw.  $\kappa_2$  an. Für einen Wert  $\kappa$ , der zwischen diesen Extremwerten liegt, hat die Gleichung (4.62) zwei verschiedene reelle Lösungen  $\lambda^{(1)}$  und  $\lambda^{(2)}$ . Setzt man aber  $\kappa = \kappa_1$  bzw.  $\kappa = \kappa_2$ , so hat (4.62) jeweils Doppelwurzeln in  $\lambda$ . Wegen

$$\lambda^{(i)} = \frac{b_{12} - \kappa g_{12}}{b_{22} - \kappa g_{22}} \pm \sqrt{\left(\frac{b_{12} - \kappa g_{12}}{b_{22} - \kappa g_{22}}\right)^2 - \frac{b_{11} - \kappa g_{11}}{b_{22} - \kappa g_{22}}}, \quad i = 1, 2, \quad (4.63)$$

ist daher der Ausdruck unter der Wurzel für  $\kappa = \kappa_1$  bzw.  $\kappa = \kappa_2$  gleich null:

$$(b_{12} - \kappa_i g_{12})^2 - (b_{11} - \kappa_i g_{11})(b_{22} - \kappa_i g_{22}) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (4.63')$$

Setzt man in (4.63')  $\kappa$  für  $\kappa_i$  und ordnet nach Potenzen von  $\kappa$ , so ergibt sich die Gleichung

$$\kappa^2 g - (g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11})\kappa + b = 0, \quad (4.64)$$

die von den Hauptkrümmungen  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  erfüllt wird. Aus (4.64) lassen sich  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  berechnen. Im allgemeinen interessieren aber weniger  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ , sondern ihr Produkt  $\kappa_1\kappa_2$  und ihr arithmetisches Mittel. Nach den Vietaschen Wurzelsätzen gilt

$$\kappa_1\kappa_2 = \frac{b}{g} \quad \text{und} \quad \kappa_1 + \kappa_2 = \frac{1}{g}(g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11}).$$

Man bezeichnet nun

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{b}{g} \quad (4.65)$$

<sup>1)</sup> Sind  $\lambda_1, \lambda_2$  die Lösungen von Gleichung (4.59), so sind  $\kappa_1 = \kappa_N(\lambda_1)$  und  $\kappa_2 = \kappa_N(\lambda_2)$  die beiden Hauptkrümmungen. Sie sind zugleich die Extremwerte der Normalkrümmung im betrachteten Flächenpunkt.

als **Gaußsches Krümmungsmaß** und

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{1}{2g}(g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11}) \quad (4.66)$$

als **mittlere Krümmung** der Fläche im Punkt  $X$ . Das Gaußsche Krümmungsmaß ist in einem elliptischen Flächenpunkt positiv, in einem hyperbolischen Flächenpunkt negativ und in einem parabolischen Flächenpunkt gleich null.

Zur Veranschaulichung der Krümmungslinien soll eine Rotationsfläche mit einer Parameterdarstellung

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = u^1 \cos u^2 \mathbf{i} + u^1 \sin u^2 \mathbf{j} + h(u^1) \mathbf{k}, \quad 0 \leq u^1 < \infty, \quad 0 \leq u^2 \leq 2\pi,$$

dienen. Hierbei ist  $h$  eine beliebige, hinreichend oft differenzierbare Funktion von  $u^1$ . Mit  $dh/du = h'$  findet man

$$g_{11} = 1 + h'^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = (u^1)^2, \quad g = (u^1)^2 + (u^1 h')^2,$$

$$b_{11} = \frac{h''}{\sqrt{1 + (h')^2}}, \quad b_{12} = 0, \quad b_{22} = \frac{u^1 h'}{\sqrt{1 + (h')^2}}.$$

Wegen  $g_{12} = b_{12} = 0$  sind die  $u^1$ - und die  $u^2$ -Linien die **Krümmungslinien** der Fläche. Die  $u^1$ -Linien sind die **Meridiankurven**, die sich als Schnittkurven von durch die Rotationsachse begrenzten Halbebenen mit der Fläche ergeben. Die  $u^2$ -Linien sind die **Breitenkreise**. Sie entstehen als Schnittkurven der Fläche mit Ebenen, die zur Rotationsachse senkrecht stehen. Die Meridiankurven und die Breitenkreise einer Rotationsfläche sind demnach die Krümmungslinien dieser Fläche.

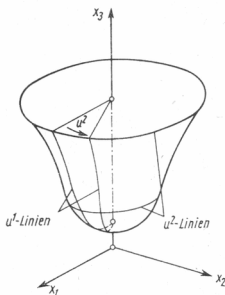


Bild 4.11. Drehfläche, die als Rotationsachse die  $x_3$ -Achse hat

Fügt man zu der obigen Parameterdarstellung noch das Glied  $pu^2\mathbf{k}$  hinzu, so erhält man durch

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = u^1 \cos u^2 \mathbf{i} + u^1 \sin u^2 \mathbf{j} + (h(u^1) + pu^2) \mathbf{k},$$

$$-\infty < u^1 < +\infty, \quad -\infty < u^2 < +\infty,$$

eine Parameterdarstellung einer allgemeinen **Schraubenfläche**. Bei  $p > 0$  entsteht die Fläche durch eine Rechtsschraubung, bei  $p < 0$  durch eine Linksschraubung einer Kurve  $u^2 = \text{const}$  (vgl. S. 32).

#### 4.2.5. Der Satz von Euler und die Dupinsche Indikatrix

Aus Gleichung (4.54) folgt für die Normalkrümmung  $\kappa_N$  im Punkt  $X$  einer Fläche

$$\kappa_N = \frac{b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12} du^1 du^2 + b_{22}(du^2)^2}{ds^2}.$$

In dieser Gleichung ist  $ds$  das Bogenelement des zur Tangente  $t_X$  des Flächenpunktes  $X$  gehörenden Normalschnittes  $c_v$ . Wählt man das  $u^1, u^2$ -Koordinatensystem so, daß die Koordinatenlinien mit den Krümmungslinien der Fläche übereinstimmen, so ist  $b_{12} = 0$ , und man hat

$$\kappa_N = b_{11} \left( \frac{du^1}{ds} \right)^2 + b_{22} \left( \frac{du^2}{ds} \right)^2. \quad (4.67)$$

Die Hauptkrümmungen  $\kappa_1, \kappa_2$  genügen wegen  $b_{12} = 0$  der aus (4.64) folgenden Gleichung

$$\kappa^2 - \kappa \left( \frac{b_{11}}{g_{11}} + \frac{b_{22}}{g_{22}} \right) + \frac{b_{11}}{g_{11}} \cdot \frac{b_{22}}{g_{22}} = 0.$$

Es ergibt sich  $\kappa_1 = b_{11}/g_{11}, \kappa_2 = b_{22}/g_{22}$ . Damit erhält man aus (4.67)

$$\kappa_N = \kappa_1 \left( \sqrt{g_{11}} \frac{du^1}{ds} \right)^2 + \kappa_2 \left( \sqrt{g_{22}} \frac{du^2}{ds} \right)^2. \quad (4.68)$$

Setzt man  $\sqrt{g_{11}} du^1 = d_1 s, \sqrt{g_{22}} du^2 = d_2 s$ , wo  $d_1 s$  und  $d_2 s$  die Bogenelemente der beiden durch  $X$  gehenden Krümmungslinien sind, und bezeichnet man den Winkel zwischen  $d_1 s$  und  $ds$  mit  $\alpha$ , so findet man, weil  $d_1 s$  und  $d_2 s$  aufeinander senkrecht stehen,  $d_1 s/ds = \cos \alpha, d_2 s/ds = \sin \alpha$ , und (4.68) geht über in

$$\kappa_N = \kappa_1 \cos^2 \alpha + \kappa_2 \sin^2 \alpha, \quad (4.69)$$

was als *Satz von Euler* bezeichnet wird. Die Krümmung  $\kappa_N$  eines beliebigen Normalschnittes  $c_v$  in einem Punkt  $X$  einer Fläche wird durch die zwei zu  $X$  gehörenden Hauptkrümmungen  $\kappa_1, \kappa_2$  und durch den Winkel  $\alpha$  bestimmt, den die Tangente  $t_X$  dieses Normalschnittes mit der Tangente der durch  $X$  gehenden Krümmungslinie  $u^1 = C_1$  bildet. Ersetzt man in (4.69) die Krümmungen  $\kappa_N, \kappa_1, \kappa_2$ , durch die entsprechenden Krümmungsradien  $R, R_1, R_2$ , so erhält man wegen  $\kappa_N = 1/R, \kappa_1 = 1/R_1, \kappa_2 = 1/R_2$

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{R_1} + \frac{\sin^2 \alpha}{R_2}. \quad (4.70)$$

Man wählt nun in der Tangentialebene  $\tau_X$  der Fläche ein orthogonales, kartesisches Koordinatensystem  $O(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ , dessen Ursprung  $O$  mit  $X$  zusammenfällt, während die  $\bar{x}_1$ -Achse die durch  $X$  laufende  $u^1$ -Linie in  $X$  berührt. Dann ist die  $\bar{x}_2$ -Achse Tangente an die durch den Punkt  $X$  gehende  $u^2$ -Linie. Man setzt  $\bar{x}_1 = \sqrt{|R|} \cos \alpha, \bar{x}_2 = \sqrt{|R|} \sin \alpha$ , und es folgt aus (4.70)

$$\frac{(\bar{x}_1)^2}{R_1} + \frac{(\bar{x}_2)^2}{R_2} = \pm 1. \quad (4.71)$$

Gleichung (4.71) stellt die Gleichung eines Kegelschnitts dar, der in der Tangentialebene  $\tau_X$  liegt, den Mittelpunkt  $O = X$  hat und dessen Hauptachsen mit der  $\bar{x}_1$ -Achse bzw. der  $\bar{x}_2$ -Achse zusammenfallen. Dieser Kegelschnitt heißt **Dupinsche Indikatrix**.

Ist  $X$  ein *elliptischer* Punkt der Fläche, so ist  $b = b_{11}b_{22} > 0$ . Dann haben  $b_{11}$  und  $b_{22}$  sowie  $g_{11}$  und  $g_{22}$  gleiches Vorzeichen, vorausgesetzt, daß  $X$  ein regulärer Flächenpunkt ist. Daher haben auch  $R_1 = \frac{g_{11}}{b_{11}}$ ,  $R_2 = \frac{g_{22}}{b_{22}}$  gleiches Vorzeichen, und wegen (4.69) hat  $R$  dasselbe Vorzeichen wie  $R_1$  und  $R_2$ . Die Dupinsche Indikatrix ist eine Ellipse.

Ist dagegen  $X$  ein *hyperbolischer* Punkt der Fläche, so ist  $b = b_{11}b_{22} < 0$ ,  $R_1$  und  $R_2$  haben unterschiedliche Vorzeichen, und  $R$  kann sowohl positiv als auch negativ sein, je nachdem wie der Winkel  $\alpha$  gewählt wird. Dann besteht die Dupinsche Indikatrix aus zwei Hyperbeln mit dem gemeinsamen Mittelpunkt  $X = O$  und zwei gemeinsamen Asymptoten, deren Richtungen mit den Asymptotenrichtungen des Punktes  $X$  übereinstimmen.

Ist schließlich  $X$  ein *parabolischer* Punkt der Fläche, so ist  $b = b_{11}b_{22} = 0$ . Dann ist entweder  $b_{11} = 0$  oder  $b_{22} = 0$ , denn  $X$  soll kein parabolischer Nabelpunkt sein. Falls  $b_{11} = 0$  ist, folgt aus (4.71)

$$\bar{x}_2 = \pm \sqrt{|R_2|}.$$

Die Dupinsche Indikatrix ist ein zur  $\bar{x}_1$ -Achse paralleles Geradenpaar. Für  $b_{22} = 0$  ergibt sich mit

$$\bar{x}_1 = \pm \sqrt{|R_1|}$$

ein zur  $\bar{x}_2$ -Achse paralleles Geradenpaar als Dupinsche Indikatrix.

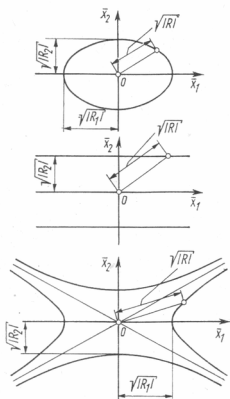


Bild 4.12. Dupinsche Indikatrix

#### 4.2.6. Das Theorema egregium

Es sei  $x(u^1, u^2)$  eine Parameterdarstellung der Klasse  $r \geq 3$  einer Fläche  $F$ . Dann läßt sich zeigen, daß das Gaußsche Krümmungsmaß  $K = b/g$  der Fläche  $F$  allein von den Koeffizienten  $g_{\nu\mu}$  der ersten Grundform und ihren ersten und zweiten Ableitungen nach  $u^1$  und  $u^2$  abhängt. Dies hat wohl als erster Gauß bemerkt. Ohne Beweis soll hier diese Beziehung angegeben werden. Sie lautet

$$K = \frac{1}{g^2} \left\{ \begin{array}{cc} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{array} \begin{array}{c} \left( \frac{\partial g_{12}}{\partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \right) \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^2} \\ \left( -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{(\partial u^2)^2} + \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u^1 \partial u^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{(\partial u^1)^2} \right) \end{array} \right. \\ - \left. \begin{array}{cc} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{array} \begin{array}{c} \frac{1}{2} \frac{\partial g_{11}}{\partial u^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1} \\ 0 \end{array} \right\}. \quad (4.72)$$

Den Beweis dieser Beziehung, die **Theorema egregium** genannt wird, kann man in den Lehrbüchern [1], Teil 2, S. 64; [3], S. 70; [6], S. 178 bis 180; [10], Teil 2, S. 226 nachlesen. Bei Verwendung orthogonaler Koordinaten vereinfacht sich die Beziehung (4.72). Man erhält in diesem Fall

$$K = - \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u^1} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \sqrt{g_{22}}}{\partial u^1} \right) + \frac{\partial}{\partial u^2} \left( \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \sqrt{g_{11}}}{\partial u^2} \right) \right\}. \quad (4.73)$$

Theorema egregium heißt ins Deutsche übersetzt auserlesener oder ausgezeichneter Lehrsatz. Die lateinische Bezeichnung geht zurück auf die im Jahre 1827 erschienene Schrift „*Disquisitiones generales circa superficies curvas*“ von C. F. Gauß. Das Theorema egregium lehrt, daß das Gaußsche Krümmungsmaß einer Fläche allein von der ersten Grundform dieser Fläche bestimmt wird. Fällt man daher eine Fläche als einen zweidimensionalen gekrümmten Raum auf – man nennt solche Räume auch Riemannsche Räume – und nimmt man an, daß es zweidimensionale Lebewesen in diesem Raum gibt, so folgt aus dem Theorema egregium, daß es diesen Wesen möglich ist, das Gaußsche Krümmungsmaß des Raumes, in dem sie leben, zu ermitteln. Voraussetzung ist allerdings dafür, daß diese Wesen die Größen  $g_{\nu\mu}$  bestimmen können. Das könnte durch Messungen geschehen. Dieser Sachverhalt ist nicht ohne Einfluß auf gewisse kosmologische Theorien geblieben. Eine andere wichtige Folgerung aus dem Theorema egregium werden wir im Abschnitt 4.2.7. kennenlernen.

#### 4.2.7. Abbildungen, Abwicklungen und Regelflächen

$F$  sei eine Fläche oder ein Flächenstück mit der zulässigen Parameterdarstellung  $x(u^1, u^2)$  der Klasse  $r \geq 1$  für das Gebiet  $B$  der  $u^1, u^2$ -Ebene und  $F^*$  eine Fläche oder ein Flächenstück mit einer ebensolchen Parameterdarstellung  $x^*(u^{*1}, u^{*2})$  für das Gebiet  $B^*$  der  $u^{*1}, u^{*2}$ -Ebene. Zwischen den Gaußschen Koordinaten  $u^1, u^2$  auf  $F$  und den Gaußschen Koordinaten  $u^{*1}, u^{*2}$  auf  $F^*$  mögen zwei Gleichungen

$$\begin{aligned} u^{*1} &= f^1(u^1, u^2), \\ u^{*2} &= f^2(u^1, u^2) \end{aligned} \quad (4.74)$$

bestehen. Die Funktionen  $f^1, f^2$  der Veränderlichen  $u^1, u^2$  seien so beschaffen, daß dem Koordinatenpaar  $u^1, u^2$  jedes Punktes  $P \in B$  durch (4.74) das Koordinaten-

paar  $u^{*1}, u^{*2}$  eines Punktes  $P^* \in B^*$  eindeutig zugeordnet wird und umgekehrt. Dazu seien  $f^1, f^2$  überall in  $B$  stetig und  $r$ -mal ( $r \geq 1$ ) nach  $u^1, u^2$  differenzierbar, und es gelte für das Koordinatenpaar  $u^1, u^2$  jedes Punktes  $P \in B$

$$\frac{\partial(f^1, f^2)}{\partial(u^1, u^2)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f^1}{\partial u^1} & \frac{\partial f^1}{\partial u^2} \\ \frac{\partial f^2}{\partial u^1} & \frac{\partial f^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (4.75)$$

Dann wird durch die Gleichungen (4.74) eine eindeutige Abbildung der Punkte von  $B$  auf die Punkte von  $B^*$  definiert. Da andererseits jedem Punkt  $P \in B$  durch die zulässige Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  eindeutig ein Punkt  $X$  auf  $F$  zugeordnet wird, ebenso jedem Punkt  $P^* \in B^*$  eindeutig ein Punkt  $X^*$  auf  $F^*$  entspricht, ist durch (4.74) auch eine eindeutige Abbildung  $A$  der Fläche  $F$  auf die Fläche  $F^*$  bzw. der Flächenstücke gegeben. Eine solche Abbildung möge eine **zulässige Abbildung** heißen.

Führt man auf  $F^*$  durch eine zulässige Koordinatentransformation der Gestalt  $u^{*1} = f^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ ,  $u^{*2} = f^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  neue Koordinaten  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$  ein, so gehen die Gleichungen (4.74) in die einfacheren Gleichungen

$$\begin{aligned} \bar{u}^1 &= u^1, \\ \bar{u}^2 &= u^2 \end{aligned} \quad (4.76)$$

über, und die Parameterdarstellung  $\mathbf{x}^*(u^{*1}, u^{*2})$  erhält die Gestalt

$$\mathbf{x}^*(f^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2), f^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)) = \bar{\mathbf{x}}(\bar{u}^1, \bar{u}^2). \quad (4.77)$$

Durch (4.76) ist dieselbe eindeutige Abbildung  $A$  von  $F$  auf  $F^*$  gegeben. Man sagt, daß  $u^1, u^2$  und  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$  gleiche Gaußsche Koordinatensysteme auf  $F$  und  $F^*$  sind.

Eine zulässige Abbildung eines Flächenstücks bzw. einer Fläche  $F$  auf ein Flächenstück bzw. auf eine Fläche  $F^*$  heißt **längentreu** oder **isometrisch**, wenn die Länge jedes Kurvenstücks auf  $F$  mit der Länge seines Bildkurvenstücks auf  $F^*$  übereinstimmt.

Sie heißt **winkeltreu** oder **konform**, wenn der Winkel, unter dem sich zwei beliebige Kurven auf  $F$  in einem Punkt  $X$  schneiden, gleich dem Winkel ist, unter dem sich ihre Bildkurven auf  $F^*$  im Bildpunkt  $X^*$  von  $X$  schneiden.

Sie heißt **flächentreu**, wenn jedes Teilgebiet  $H$  auf  $F$  in ein Teilgebiet  $H^*$  auf  $F^*$  abgebildet wird, das den gleichen Flächeninhalt wie  $H$  hat.

Es gilt nun der folgende

**Satz 4.5:** Sind  $u^1, u^2$  und  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$  Gaußsche Koordinatensysteme auf Flächen  $F$  und  $F^*$  und sind  $g_{\nu\mu}(u^1, u^2)$  die Koeffizienten der ersten Grundform von  $F$ ,  $\bar{g}_{\nu\mu}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  diejenigen von  $F^*$ , dann gilt für die durch  $\bar{u}^1 = u^1$ ,  $\bar{u}^2 = u^2$  gegebene zulässige Abbildung  $A$  **S.4.5**

1.  $A$  ist genau dann längentreu, wenn  $g_{\nu\mu}(u^1, u^2) = \bar{g}_{\nu\mu}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ ;
2.  $A$  ist genau dann winkeltreu, wenn  $g_{\nu\mu}(u^1, u^2) = \bar{g}_{\nu\mu}(\bar{u}^1, \bar{u}^2) h(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ ,  $h(\bar{u}^1, \bar{u}^2) > 0$ ;
3.  $A$  ist genau dann flächentreu, wenn  $g(u^1, u^2) = \bar{g}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ .

Der Beweis des Satzes kann hier nicht erbracht werden. Der interessierte Leser findet Näheres in [6], S. 212 bis 252.

Aus dem Satz folgt, daß eine längentreue Abbildung stets auch winkeltreu und flächentreu ist.

Eine **Verbiegung** oder **Abwicklung** einer Fläche ist eine stetige Deformation dieser Fläche, bei der alle Flächenkurven ihre Länge beibehalten. Unverbiegbare Flächen heißen auch **starre Flächen**. Verbiegt man eine Fläche  $F$ , so entsteht aus  $F$  eine andere Fläche  $F^*$  oder auch nur ein Flächenstück einer Fläche  $F^*$ . In beiden Fällen sagt man, daß  $F$  in  $F^*$  verbogen bzw. auf  $F^*$  abgewickelt wurde. Mit einer Verbiegung oder Abwicklung von  $F$  auf  $F^*$  ist stets eine längentreue Abbildung von  $F$  auf  $F^*$  gegeben. Bezeichnet man die Koordinaten auf  $F$  mit  $u^1, u^2$ , dann geht das Kurvennetz der Koordinatenlinien  $u^1 = C_1, u^2 = C_2$  in ein ebensolches Kurvennetz auf  $F^*$  über. Verwendet man dieses Kurvennetz wieder als Koordinatenlinien auf  $F^*$  und bezeichnet die Koordinaten auf  $F^*$  mit  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$ , so ist durch  $\bar{u}^1 = u^1, \bar{u}^2 = u^2$  eine längentreue Abbildung von  $F$  auf  $F^*$  bestimmt. Daher gilt  $g_{\nu\mu}(u^1, u^2) = \bar{g}_{\nu\mu}(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  für  $\nu, \mu = 1, 2$ . Aus dem Theorema egregium (vgl. 4.2.6.) folgt, daß das Gaußsche Krümmungsmaß  $K$  in jedem beliebigen Punkt  $X$  auf  $F$  gleich dem Gaußschen Krümmungsmaß im Bildpunkt  $X^*$  von  $X$  auf  $F^*$  ist. Das Gaußsche Krümmungsmaß ist biegungsinvariant. Hieraus folgt, daß die Oberfläche einer Kugel niemals längentreu auf eine Ebene abgebildet bzw. in ein ebenes Flächenstück verbogen werden kann. Denn für die Kugel mit Radius  $R$  ist  $K = 1/R^2$ , dagegen ist in jedem Punkt einer Ebene  $K = 0$ . Es gilt der vgl. [6], S. 207).

**S.4.6 Satz: 4.6:** Eine Fläche oder ein Flächenstück kann genau dann in eine Ebene abgewickelt werden, wenn ihr Krümmungsmaß in allen Punkten den Wert Null hat.

Eine derartige Fläche heißt **Torse**. Auf einer Torse liegen stets eine oder auch mehrere Scharen von geraden Linien. Eine Fläche, die eine oder mehrere Geradscharen enthält, heißt **Regelfläche** oder **Strahlfläche**. Demnach ist eine Torse stets eine Regelfläche. Jedoch ist eine Regelfläche im allgemeinen keine Torse. Die Tangenten einer Raumkurve bilden eine gekrümmte Fläche, die als **Tangentenfläche** der Raumkurve bezeichnet wird. Diese ist stets eine Torse und daher abwickelbar. Eine Regelfläche, die nicht in eine Ebene abgewickelt werden kann, nennt man auch eine **windschiefe** Regelfläche. Eine Parameterdarstellung einer Regelfläche ist gegeben durch

$$\mathbf{x}(u^1, u^2) = \mathbf{y}(u^1) + u^2 \mathbf{z}(u^1), \quad \alpha \leq u^1 \leq \beta, \quad -\infty < u^2 < +\infty. \quad (4.78)$$

Die  $u^2$ -Linien sind Geraden, die  $u^1$ -Linien sind im allgemeinen Kurven. Man nennt die Geraden  $u^1 = \text{konstant}$  auch die Erzeugenden der Regelfläche. Der Vektor  $\mathbf{y}(u^1)$  beschreibt, wenn man ihn als Ortsvektor auffaßt, eine Raumkurve, die auf der Regelfläche liegt. Diese Kurve wird auch **Leitlinie** genannt. Meist verwendet man als Parameter  $u^1$  die Bogenlänge der Leitlinie. Wir setzen  $\mathbf{y}_{u^1} = \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z}_{u^1} = \mathbf{z}$  und fordern, daß  $\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z} \neq \mathbf{0}$  ist.

Eine Gerade bewege sich im Raum derart, daß einer ihrer Punkte längs der Leitlinie gleitet. Dabei bleibe die Gerade stets zum Vektor  $\mathbf{z}(u^1)$  parallel und  $u^1$  sei der zugehörige Parameterwert des Punktes der Leitlinie, in dem sich der gleitende Punkt augenblicklich befindet. Führt eine Gerade eine derartige Bewegung aus, so erzeugt sie eine Regelfläche mit der Parameterdarstellung (4.78). Ist speziell der Vektor  $\mathbf{y}$  konstant, d. h. unabhängig von  $u^1$ , so ist (4.78) eine Parameterdarstellung einer **Kegel- fläche** mit der Spitze in  $\mathbf{Y}$  mit dem Ortsvektor  $\mathbf{y}$ . Hat dagegen  $\mathbf{z}(u^1)$  für alle Werte von  $u^1$  die gleiche Richtung und ist  $\mathbf{y}$  von  $u^1$  abhängig, so ist (4.78) eine Parameterdarstellung einer **Zylinderfläche**. Beide Flächen sind in die Ebene abwickelbar.



Aus  $\mathbf{x}_{u^1} = \dot{\mathbf{y}} + u^2 \dot{\mathbf{z}}$  und  $\mathbf{x}_{u^2} = \mathbf{z}$  folgt<sup>1)</sup>

$$g_{11} = \dot{\mathbf{y}}^2 + 2u^2(\dot{\mathbf{y}} \cdot \dot{\mathbf{z}}) + (u^2)^2 \dot{\mathbf{z}}^2,$$

$$g_{12} = \dot{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{z} + u^2(\dot{\mathbf{z}} \cdot \mathbf{z}),$$

$$g_{22} = \mathbf{z}^2,$$

$$g = |\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z}|^2 + |\mathbf{z} \times \dot{\mathbf{z}}|^2 (u^2)^2 + 2u^2(\dot{\mathbf{y}} \cdot [(\mathbf{z} \times \dot{\mathbf{z}}) \times \mathbf{z}]) = [\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z} + u^2(\dot{\mathbf{z}} \times \mathbf{z})]^2.$$

Für den Normalenvektor  $\mathbf{f}$  der Fläche findet man

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{g}} (\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z} + u^2(\dot{\mathbf{z}} \times \mathbf{z})). \quad (4.79)$$

Aus  $\mathbf{x}_{u^1 u^1} = \ddot{\mathbf{y}} + u^2 \ddot{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{x}_{u^1 u^2} = \dot{\mathbf{z}}$ ,  $\mathbf{x}_{u^2 u^2} = \mathbf{0}$  folgt

$$b_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} [(\ddot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z}) + u^2(\ddot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}) + u^2(\ddot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z}) + (u^2)^2 (\ddot{\mathbf{z}}, \dot{\mathbf{z}}, \mathbf{z})],$$

$$b_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}} [(\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z}) \cdot \dot{\mathbf{z}}] = \frac{1}{\sqrt{g}} [(\dot{\mathbf{y}}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}})], \quad b_{22} = 0.$$

Das Gaußsche Krümmungsmaß lautet:

$$K = \frac{b}{g} = -\frac{1}{g^2} [(\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z}) \cdot \dot{\mathbf{z}}]^2.$$

Soll die Fläche eine Torse sein, so muß gelten

$$(\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z}) \cdot \dot{\mathbf{z}} = 0. \quad (4.80)$$

Dies ist die Torsenbedingung. Eine Regelfläche mit einer Parameterdarstellung (4.78) ist genau dann eine Torse, wenn (4.80) erfüllt ist. Gilt die Torsenbedingung, so ist der Vektor  $\dot{\mathbf{z}}$  eine Linearkombination der Vektoren  $\dot{\mathbf{y}}$  und  $\mathbf{z}$ . Es ist  $\dot{\mathbf{z}} = \lambda \dot{\mathbf{y}} + \mu \mathbf{z}$ . Setzt man dies in die Formel für den Normalenvektor (4.79) ein, so folgt

$$\mathbf{f} = \frac{1}{\sqrt{g}} [\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z} + u^2 \lambda (\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z})] = \frac{1 + u^2 \lambda}{\sqrt{g}} (\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z}) = \pm \frac{\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z}}{|\dot{\mathbf{y}} \times \mathbf{z}|}. \quad (4.81)$$

Die Richtung des Normalenvektors  $\mathbf{f}$  ist unabhängig von  $u^2$ . In allen Punkten einer Erzeugenden  $u^1 = \text{const}$  hat eine Torse gleichgerichtete Flächennormalenvektoren. Eine Torse hat daher in allen Punkten einer jeden Erzeugenden dieselbe Tangentialebene. Daher wird eine Torse von jeder Tangentialebene in allen Punkten einer Erzeugenden berührt. Es sei noch bemerkt, daß man eine Torse stets als Tangentenfläche einer bestimmten Raumkurve auffassen kann. Wegen einer ausführlichen Darstellung der Theorie der Regelflächen sei auf die Bücher [3], [6], [7], [10], [13] verwiesen.

Unter welchen Voraussetzungen ist die allgemeine Schraubenfläche

$$\begin{aligned} \text{mit} \quad & \mathbf{x}(u^1, u^2) = u^1 \cos u^2 \mathbf{i} + u^1 \sin u^2 \mathbf{j} + (h(u^1) + pu^2) \mathbf{k} \\ & -\infty < u^1 < +\infty, \quad -\infty < u^2 < +\infty \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Für die Berechnung von  $g$  ist eine mehrmalige Anwendung der Formeln (1.5) und (1.7) erforderlich.

in die Ebene abwickelbar? Dazu muß die Fläche eine Torse sein. Das heißt, daß das Gaußsche Krümmungsmaß  $K$  in allen Punkten der Fläche verschwinden muß. Es ist  $K = b/g$ . Die Größe  $b$  hat den Wert

$$b = \frac{(u^1)^3 h' h'' - p^2}{(u^1)^2 + (u^1 h')^2 + p^2}.$$

Da  $b$  gleich null sein muß, ergibt sich die Differentialgleichung

$$(u^1)^3 h' h'' - p^2 = 0$$

für die unbekannte Funktion  $h(u^1)$ . Für  $h'(u^1)$  findet man

$$h'(u^1) = \frac{\sqrt{A(u^1)^2 - p^2}}{u^1}.$$

Wählt man für die Integrationskonstante  $A = p^2/a^2$ , wo  $a$  eine positive Konstante ist, so ergibt sich für  $h$

$$h(u^1) = p \left( \frac{1}{a} \sqrt{(u^1)^2 - a^2} - 2 \arctan \left( \frac{\sqrt{(u^1)^2 - a^2}}{u^1 + a} \right) \right) + B.$$

Die Schraubenfläche mit der gefundenen speziellen Funktion  $h$  heißt *Schraubtorse*. Setzt man  $B = 0$  und führt die Koordinatentransformation

$$(u^1)^2 = a^2 + \frac{a^2}{a^2 + p^2} (\tilde{u}^1)^2, \quad \tan u^2 = \frac{\sqrt{a^2 + p^2} \sin \tilde{u}^2 + \tilde{u}^1 \cos \tilde{u}^2}{\sqrt{a^2 + p^2} \cos \tilde{u}^2 - \tilde{u}^1 \sin \tilde{u}^2}$$

durch, so geht die obige Parameterdarstellung mit der speziellen Funktion  $h$  in eine einfachere Parameterdarstellung

$$\bar{\mathbf{x}}(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2) = a \cos \tilde{u}^2 \mathbf{i} + a \sin \tilde{u}^2 \mathbf{j} + p \tilde{u}^2 \mathbf{k} + \tilde{u}^1 \left( \frac{-a \sin \tilde{u}^2 \mathbf{i} + a \cos \tilde{u}^2 \mathbf{j} + p \mathbf{k}}{\sqrt{a^2 + p^2}} \right)$$

der Schraubtorse über, aus der man leicht erkennt, daß die Schraubtorse eine Regelfläche und die Tangentenfläche der gewöhnlichen Schraubenlinie ist. Der Vektor in der runden Klammer ist der Tangentenvektor einer gewöhnlichen Schraubenlinie, deren Parameterdarstellung durch den vor der Klammer stehenden Vektor gegeben ist (vgl. S. 33).

#### 4.2.8. Die geodätische Krümmung einer Flächenkurve

Auf einer Fläche  $F$ , die durch eine zulässige Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$  der Klasse  $r \geq 2$  gegeben ist, werde eine Flächenkurve  $c$  mit der Parameterdarstellung  $u^i = u^i(t)$ ,  $i = 1, 2$ , betrachtet. Es sei  $X$  ein beliebiger Punkt von  $c$  und  $\tau_X$  die Tangentialebene, die die Fläche in  $X$  berührt. Projiziert man  $c$  orthogonal in diese Tangentialebene, so erhält man in  $\tau_X$  eine ebene Kurve  $c_0$ , die durch  $X$  geht und dort die Tangente der Kurve  $c$  berührt. Die Kurve  $c_0$  habe in  $X$  die Krümmung  $\kappa_0 = 1/\varrho_0$ . Man definiert nun für die Flächenkurve  $c$  im Punkt  $X$  eine **geodätische Krümmung**, die mit  $\kappa_g$  bezeichnet wird und deren Wert mit  $\kappa_0$  übereinstimmt. Man setzt also

$$\kappa_g = \kappa_0. \quad (4.82)$$

Man kann  $c$  auch als eine Flächenkurve des projizierenden Zylinders auffassen, der durch die Projektion von  $c$  entsteht. Dann ist  $c_0$  der zur Tangente  $t_X$  gehörige Normalschnitt dieses Zylinders.

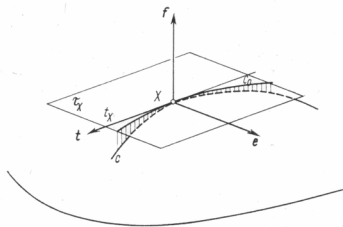


Bild 4.13. Zur geodätischen Krümmung

Ist  $\kappa$  die Krümmung von  $c$  in  $X$  und  $\varphi$  der Winkel zwischen der Schmiegeebene  $\sigma_X$  von  $c$  und der Tangentialebene  $\tau_X$ , so gilt nach dem Satz von Meusnier  $\kappa_0 = \kappa \cos \varphi$ . Hieraus folgt wegen (4.82)

$$\kappa_g = \kappa \cos \varphi. \quad (4.83)$$

Ist  $\mathbf{t}$  der normierte Tangentenvektor von  $c$  in  $X$  und  $\mathbf{f}$  der Flächennormalenvektor von  $F$  in  $X$ , so ist  $\mathbf{e} = \mathbf{f} \times \mathbf{t}$  ein Einheitsvektor, der in der Tangentialebene  $\tau_X$  liegt und senkrecht zu  $t_X$  steht. Dann ist  $\cos \varphi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}$ , wo  $\mathbf{n}$  den Hauptnormalenvektor von  $c$  in  $X$  bezeichnet. Damit erhält man  $\kappa_g = \kappa(\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}) = \kappa(\mathbf{n} \cdot (\mathbf{f} \times \mathbf{t})) = \kappa(\mathbf{n}, \mathbf{f}, \mathbf{t})$ . Berücksichtigt man noch die erste Frenetsche Formel, so folgt

$$\kappa_g = (\mathbf{t}', \mathbf{f}, \mathbf{t}) = (\mathbf{t} \times \mathbf{t}') \cdot \mathbf{f}. \quad (4.84)$$

Man kann die geodätische Krümmung einer Flächenkurve allein durch die Koeffizienten  $g_{\nu\mu}$  der ersten Grundform und deren Ableitungen ausdrücken. Die Formel dafür sei ohne Beweis hier angeführt (vgl. [6], S. 190).

$$\begin{aligned} \kappa_g = \sqrt{g} \{ & \Gamma_{11}^2 (u'^1)^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) (u'^1)^3 u'^2 - (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) u'^1 (u'^2)^2 \\ & - \Gamma_{22}^1 (u'^2)^3 + u'^1 u''^2 - u'^1 u'^2 \}. \end{aligned} \quad (4.85)$$

Die Striche bedeuten dabei die Ableitung nach der Bogenlänge. Die Größen  $\Gamma_{\alpha\beta}^\nu$  sind die *Christoffelsymbole* zweiter Art. Man erhält sie aus den Christoffelsymbolen erster Art  $\Gamma'_{\alpha\beta\mu}$ , die durch

$$\Gamma_{\alpha\beta\mu} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial g_{\beta\mu}}{\partial u^\alpha} + \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial u^\beta} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u^\mu} \right\} = \mathbf{x}_\alpha \cdot \mathbf{x}_{\mu\beta} \cdot \mathbf{x}_\mu^\alpha$$

gegeben sind (vgl. [6], S. 181, S. 128), durch Überschiebung mit dem kontravarianten Fundamentaltensor  $g^{\nu\mu}$ . Es ist also

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\nu = \Gamma_{\alpha\beta\mu} g^{\mu\nu}, \quad \alpha, \beta, \mu, \nu = 1, 2. \quad (4.86)$$

Eine Flächenkurve, bei der in allen Punkten die geodätische Krümmung verschwindet, ist eine **geodätische Linie** der Fläche. Wählt man auf einer geodätischen Linie zwei Punkte  $A, B$ , die hinreichend nahe beieinander liegen, so ist die Länge des zwischen  $A$  und  $B$  liegenden Kurvenstücks der geodätischen Linie kleiner als die Länge eines beliebigen die Punkte  $A, B$  verbindenden Kurvenstücks auf der Fläche. Kann man eine Fläche, auf der sich eine Flächenkurve befindet, auf eine andere

Fläche, z. B. auf eine Ebene, abwickeln, so ändert sich die geodätische Krümmung dabei nicht, weil  $\kappa_g$  nur von den Koeffizienten der ersten Grundform und ihren Ableitungen abhängt. Eine geodätische Linie der Fläche geht daher bei einer Abwicklung in die Ebene in eine geodätische Linie der Ebene, d. h. in eine Gerade über. Aus Gleichung (4.83) erkennt man auch, wie sich der Krümmungsradius  $\varrho_0$  der abgewickelten Kurve aus dem Krümmungsradius  $\varrho$  der ursprünglichen Flächenkurve

berechnet. Mit  $\kappa = \frac{1}{\varrho}$ ,  $\kappa_g = \kappa_0 = \frac{1}{\varrho_0}$  folgt

$$\varrho : \varrho_0 = \cos \varphi. \quad (4.87)$$

- \* **Aufgabe 4.8:** Eine Formschulter (Bild 4.14) besteht aus einem Zylinderteil (gerader Kreiszylinder, Radius  $r$ ) und einem Schulterteil. Beide sind über eine Raumkurve, die Umformlinie, miteinander verbunden. Schulterteil und Zylinderteil sind Torsen und gemeinsam (längs der Umformlinie zusammenhängend) in die Ebene abwickelbar. Ein über das Schulterteil gleitender Papierstreifen, der über die Umformlinie in den Zylinderteil hineingezogen wird, kann dabei in einen zylindrischen Schlauch umgeformt werden.

Die Umformlinie  $l$  möge bei der Abwicklung des Zylinders in eine Kettenlinie mit der Gleichung  $y = a \cosh(x/a) + b$ ,  $x = r\varphi$ ,  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$  übergehen.  $B$  sei Ursprung eines Koordinatensystems mit den Achsen  $x, y$ , parallel und gleichgerichtet zur  $x_2$ - und zur  $x_3$ -Achse. Der Zylindermantel werde in die  $x, y$ -Ebene abgewickelt. Man bestimme eine Parameterdarstellung der Umformlinie bezüglich des im Bild 4.14 gezeichneten Koordinatensystems  $O(x_1, x_2, x_3)$  und berechne die Größen  $a, b$  in Abhängigkeit von der Umformhöhe  $h = \overline{AB}$  und dem Winkel  $\varepsilon$  zwischen Zylindertangentialebene und Schmiegeebene der Umformlinie im Punkt  $A$  ( $\tan \varepsilon = c$ ). Wie groß sind die Krümmungsradien  $\varrho$  und  $\varrho_0$  der Umformlinie und ihrer Abwicklung im Punkt  $A$ ? Man zeige, daß der Winkel  $\varepsilon$  zwischen Zylindertangentialebene und Schmiegeebene in allen Punkten der Umformlinie die gleiche Größe hat.

Eine ausführliche Darstellung der Problematik findet der Leser in [19].

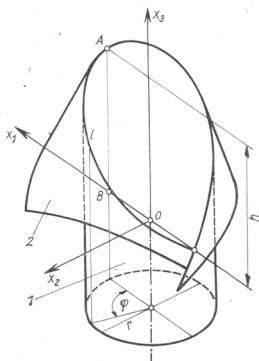


Bild 4.14. Prinzipieller Aufbau einer Formschulter  
1 Zylinderteil, 2 Schulterteil (Torse),  $l$  Umformlinie

### 4.2.9. Die stereographische Projektion

Im dreidimensionalen euklidischen Raum  $E^3$  werde eine Kugel mit dem Mittelpunkt  $M$  und dem Radius  $R$  betrachtet, die auf ein orthogonales, kartesisches Koordinatensystem  $O(x_1, x_2, x_3)$  bezogen ist. Dabei habe  $M$  die Koordinaten  $x_1 = x_2 = 0, x_3 = R$ . Die  $x_1, x_2$ -Ebene berührt die Kugel im Ursprung  $O$  und ist somit Tangentialebene an sie. Bezeichnet man die Kugeloberfläche mit  $F$  und die  $x_1, x_2$ -Ebene mit  $F^*$ , so läßt sich eine Abbildung von  $F$  auf  $F^*$  erklären. Der zum Punkt  $O$  bezüglich  $M$  spiegelbildlich liegende Punkt  $S$  hat die Koordinaten  $x_1 = x_2 = 0, x_3 = 2R$ . Man projiziert nun die Punkte von  $F$  aus dem Projektionszentrum  $S$  auf die Ebene  $F^*$ . Ist  $X \neq S$  ein beliebiger Punkt von  $F$ , so schneidet die Gerade  $SX$  die Ebene  $F^*$  in einem Punkt  $X^*$ , dessen Koordinaten mit  $x_1^*, x_2^*$  und  $x_3^* = 0$  bezeichnet werden sollen. Dieser Punkt  $X^*$  ist der Bildpunkt von  $X$ . Faßt man die  $x_1, x_2$ -Ebene  $F^*$  als Gaußsche Zahlenebene auf, indem man in ihr einen unendlich fernen Punkt  $S^*$  einführt und ordnet man diesen dem Punkt  $S$  als Bildpunkt zu, so ist durch diese Erweiterung eine eineindeutige Abbildung der Kugeloberfläche  $F$  auf die durch den Fernpunkt  $S^*$  abgeschlossene Tangentialebene  $F^*$  gegeben. Diese Abbildung heißt **stereographische Projektion**.

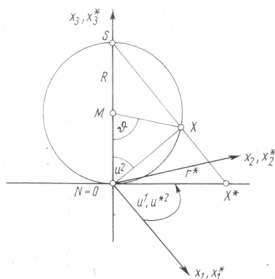


Bild 4.15. Die stereographische Projektion

Es sei  $X$  ein beliebiger Punkt von  $F$ ,  $X'$  seine Orthogonalprojektion in die  $x_1, x_2$ -Ebene  $F^*$ . Der Winkel zwischen der  $x_1$ -Achse und dem Strahl  $OX'$  werde mit  $u^1$ , der Winkel zwischen dem Strahl  $OX$  und der  $x_3$ -Achse mit  $u^2$  bezeichnet. Der Fall  $X = S$  bzw.  $X = O$  werde zunächst ausgeschlossen.

Eine Parameterdarstellung der Kugeloberfläche lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u^1, u^2) &= \mathbf{i} \, 2R \cos u^2 \sin u^2 \cos u^1 + \mathbf{j} \, 2R \cos u^2 \sin u^2 \sin u^1 \\ &\quad + \mathbf{k} \, 2R \cos^2 u^2, \\ 0 &\leq u^1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq u^2 \leq \pi/2. \end{aligned}$$

Die Punkte  $S$  und  $O$  werden durch diese Darstellung auch mit erfaßt. Für  $S$  muß man  $u^2 = 0$  und für  $O$   $u^2 = \pi/2$  setzen. Allerdings sind die zugehörigen  $u^1$ -Werte in beiden Fällen unbestimmt.

Entsprechend ergibt sich für die  $x_1, x_2$ -Ebene, wenn  $\overline{OX}^* = u^{*1}$  gesetzt wird und  $u^{*2}$  den Winkel zwischen der  $x_1$ -Achse und dem Strahl  $OX^*$  bedeutet, die Darstellung

$$\begin{aligned} x^*(u^{*1}, u^{*2}) &= iu^{*1} \cos u^{*2} + ju^{*1} \sin u^{*2}, \\ 0 &\leq u^{*1} < \infty, \quad 0 \leq u^{*2} \leq 2\pi. \end{aligned}$$

Zerlegt man die beiden Parameterdarstellungen in Komponenten, so erhält man für die Kugeloberfläche  $F$

$$\begin{aligned} x_1 &= 2R \cos u^2 \sin u^2 \cos u^1, \\ x_2 &= 2R \cos u^2 \sin u^2 \sin u^1, \quad 0 \leq u^1 \leq 2\pi, \quad 0 \leq u^2 \leq \frac{1}{2}\pi. \\ x_3 &= 2R \cos^2 u^2, \end{aligned} \quad (4.88)$$

Führt man ein neues Koordinatensystem  $O(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$  ein, dessen Achsen mit denen des alten zusammenfallen, so hat man für  $F^*$  die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} x_1^* &= u^{*1} \cos u^{*2}, \\ x_2^* &= u^{*1} \sin u^{*2}, \quad 0 \leq u^{*1} < \infty, \quad 0 \leq u^{*2} \leq 2\pi. \\ x_3^* &= 0, \end{aligned} \quad (4.89)$$

Die Abbildungsgleichungen lauten dann

$$\begin{aligned} u^{*1} &= 2R \cot u^2, \\ u^{*2} &= u^1. \end{aligned} \quad (4.90)$$

Sie lassen sich unmittelbar aus Bild 4.15 ablesen. Den Punkten  $O$  und  $S$  entsprechen die Koordinatenpaare  $u^2 = \pi/2$ ,  $u^1$  unbestimmt und  $u^2 = 0$ ,  $u^1$  unbestimmt. Im ersten Fall ergibt sich  $O^* = O$  und im zweiten Fall erhält man den Punkt  $S^*$ .

Um auf  $F$  und  $F^*$  gleiche Gaußsche Koordinatensysteme zu haben, führt man die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned} u^{*1} &= 2R \cot \tilde{u}^2, \\ u^{*2} &= \tilde{u}^1 \end{aligned} \quad (4.91)$$

in der Ebene  $F^*$  durch. Dann gehen die Abbildungsgleichungen (4.90) in

$$\begin{aligned} \tilde{u}^1 &= u^1, \\ \tilde{u}^2 &= u^2 \end{aligned} \quad (4.92)$$

und die Parameterdarstellung (4.89) von  $F^*$  in

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= 2R \cot \tilde{u}^2 \cos \tilde{u}^1, \\ \bar{x}_2 &= 2R \cot \tilde{u}^2 \sin \tilde{u}^1, \\ \bar{x}_3 &= 0 \end{aligned} \quad (4.93)$$

über. Für die Koeffizienten  $g_{\nu\mu}$  und  $\bar{g}_{\nu\mu}$  der ersten Grundformen von  $F$  und  $F^*$  ergibt sich aus (4.88) und (4.89)

$$\begin{aligned} g_{11} &= 4R^2 \cos^2 u^2 \sin^2 u^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 4R^2, \\ \bar{g}_{11} &= 4R^2 \cot^2 \tilde{u}^2, \quad \bar{g}_{12} = 0, \quad \bar{g}_{22} = \frac{4R^2}{\sin^4 \tilde{u}^2}. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Berücksichtigt man (4.92), so erkennt man, daß die Größen  $g_{\nu\mu}$  und  $\bar{g}_{\nu\mu}$  für  $\nu, \mu = 1, 2$  zueinander proportional sind. Es bestehen die Beziehungen

$$g_{11} = \bar{g}_{11} \sin^4 \bar{u}^2, \quad g_{12} = \bar{g}_{12} \sin^4 \bar{u}^2 = 0, \quad g_{22} = \bar{g}_{22} \sin^4 \bar{u}^2. \quad (4.95)$$

Nach Satz 4.5 ist daher die stereographische Projektion winkeltreu oder konform.

Bildet man den Quotienten aus dem Bogenelement  $d\bar{s}$  von  $F^*$  und seinem Urbild  $ds$  von  $F$ , so erhält man wegen (4.95) und (4.92)

$$\bar{\lambda} = \frac{d\bar{s}}{ds} = \frac{1}{\sin^2 u^2}. \quad (4.96)$$

Die Größe  $\bar{\lambda}$  gibt die Längenverzerrung an. Sie ist die Zahl, mit der man die Länge  $ds$  des von einem Punkt  $X$  der Urbildfläche ausgehenden Linienelementes dieser Fläche multiplizieren muß, um die Länge  $d\bar{s}$  seines Bildes in der Bildfläche  $F^*$  zu erhalten. Im allgemeinen hängt  $\bar{\lambda}$  noch von der Richtung  $du^2 : du^1 = \lambda$  des Linienelementes  $ds$  ab. Bei der stereographischen Projektion ist dies jedoch nicht der Fall. Bei ihr ist die Längenverzerrung in jeder Richtung gleich groß.

Es sollen nun die *Abbildungsgleichungen* für die stereographische Projektion der Nordhalbkugel der Erde vom Südpol aus aufgestellt werden. Wir setzen dazu in (4.90)  $u^{*1} = r^*$ ,  $u^{*2} = u^1 = \lambda$  und wählen an Stelle des Winkels  $u^2$  die Poldistanz  $\vartheta$  (vgl. Bild 4.15). Dann erhält man mit

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta}{2} &= \frac{\pi}{2} - u^2 \\ r^* &= 2R \cot \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2} \right) = 2R \tan \left( \frac{\vartheta}{2} \right) \end{aligned} \quad (4.97)$$

und aus (4.89) schließlich

$$\begin{aligned} x_1^* &= 2R \tan \left( \frac{\vartheta}{2} \right) \cos \lambda, \\ x_2^* &= 2R \tan \left( \frac{\vartheta}{2} \right) \sin \lambda, \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad -\pi \leq \lambda \leq \pi, \\ x_3^* &= 0, \end{aligned} \quad (4.98)$$

Der Winkel  $\lambda$  gibt die geographische Länge an. Allerdings liegen Punkte der Erdoberfläche, für die  $\lambda < 0$  ist, auf einem Meridian östlich von Greenwich. Schließlich sollen noch die Abbildungsgleichungen für die stereographische Projektion in kartesischen Koordinaten angegeben werden. Aus (4.88), (4.89) und (4.90) folgt nach entsprechender Elimination von  $u^1, u^2$

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{2Rx_1}{2R - x_3}, \quad x_2^* = \frac{2Rx_2}{2R - x_3}, \quad x_3^* = 0; \\ x_1 &= \frac{4R^2 x_1^*}{(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 + 4R^2}, \quad x_2 = \frac{4R^2 x_2^*}{(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 + 4R^2}, \\ x_3 &= \frac{2R((x_1^*)^2 + (x_2^*)^2)}{(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 + 4R^2}. \end{aligned} \quad (4.100)$$

Aus (4.100) erkennt man, daß für  $x_1, x_2, x_3$  stets die Beziehung

$$(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3 - R)^2 = R^2 \quad (4.101)$$

erfüllt ist, denn  $x_1, x_2, x_3$  sind Koordinaten eines beliebigen Punktes der Kugeloberfläche.

**S.4.7 Satz 4.7:** Die stereographische Abbildung ist eine Kreisverwandtschaft, d. h., sie bildet einen beliebigen Kreis der Kugeloberfläche in einen Kreis oder eine Gerade der Tangentialebene  $F^*$  ab.

*Beweis:* Ein Kreis  $k$  auf  $F$  kann als Schnitt der durch (4.101) gegebenen Kugeloberfläche  $F$  mit einer durch die Gleichung  $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$  bestimmten Ebene aufgefaßt werden. Setzt man (4.100) in die Ebenengleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{a 4R^2 x_1^* + b 4R^2 x_2^* + c 2R((x_1^*)^2 + (x_2^*)^2)}{(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 + 4R^2} + d = 0.$$

Außerdem gilt  $x_3^* = 0$ , da die Kugeloberfläche  $F$  auf die  $x_1, x_2$ -Ebene  $F^*$  abgebildet wird. Formt man die erhaltene Gleichung um, so findet man

$$(x_1^*)^2 + (x_2^*)^2 + \frac{4aR^2}{2cR + d} x_1^* + \frac{4bR^2}{2cR + d} x_2^* + \frac{4dR^2}{2cR + d} = 0. \quad (4.102)$$

Ist  $2cR + d \neq 0$ , so stellt (4.102) die Gleichung eines Kreises in der  $x_1, x_2$ -Ebene  $F^*$  dar. Falls  $2cR + d = 0$  ist, geht der Kreis  $k$  auf  $F$  in eine Gerade auf  $F^*$  über. Die Ebene des Kreises  $k$  hat in diesem Fall die Gleichung  $ax_1 + bx_2 + c(x_3 - 2R) = 0$  und enthält ebenso wie  $k$  den Punkt  $S$ . Hieraus folgt, daß alle Kreise auf  $F$ , die durch das Projektionszentrum  $S$  gehen, in Geraden der Ebene  $F^*$  abgebildet werden. Umgekehrt entspricht jeder Geraden in  $F^*$  ein Kreis auf  $F$ , der  $S$  enthält.

Die stereographische Projektion wird unter anderem bei Kartenentwürfen, bei der Funkpeilung und in der Kristallographie benötigt, wo sie als Wulffsches Netz bekannt ist (vgl. [15], Bd. 2, S. 19–40).

#### 4.2.10. Die Abbildung von Bonne

Als ein weiteres Beispiel für eine Abbildung der Kugeloberfläche in eine Ebene soll die *Abbildung von Bonne* betrachtet werden. Die Kugeloberfläche, die wieder mit  $F$  bezeichnet werden soll, sei gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos u^2 \cos u^1, \\ x_2 &= r \cos u^2 \sin u^1, \quad 0 \leq u^1 \leq 2\pi, \quad -\pi/2 \leq u^2 \leq \pi/2. \\ x_3 &= r \sin u^2, \end{aligned} \quad (4.103)$$

Die *Abbildungsgleichungen* für die Abbildung von  $F$  auf die Ebene  $F^*$  lauten bei Verwendung von Polarkoordinaten  $r^*, \varphi^*$  (vgl. [6], S. 255)

$$\begin{aligned} r^* &= r \left( \frac{\pi}{2} - u^2 \right), \\ \varphi^* &= \frac{u^1 \cos u^2}{\frac{\pi}{2} - u^2}. \end{aligned} \quad (4.104)$$

Hieraus ergibt sich für die Ebene  $F^*$  eine Parameterdarstellung, wenn man ein kartesisches Koordinatensystem einführt, dessen Ursprung  $O$  mit dem Pol des Polarkoordinatensystems und dessen  $\bar{x}_1$ -Achse mit dem Strahl  $\varphi^* = 0$  zusammenfällt,



und wenn man außerdem in  $F^*$  das gleiche Gaußsche Koordinatensystem wie auf  $F$  verwendet

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 &= r \left( \frac{\pi}{2} - \bar{u}^2 \right) \cos \left( \frac{\bar{u}^1 \cos \bar{u}^2}{\frac{\pi}{2} - \bar{u}^2} \right), \\ \bar{x}_2 &= r \left( \frac{\pi}{2} - \bar{u}^2 \right) \sin \left( \frac{\bar{u}^1 \cos \bar{u}^2}{\frac{\pi}{2} - \bar{u}^2} \right), \quad 0 \leq \bar{u}^1 \leq 2\pi, \\ &\quad -\pi/2 \leq \bar{u}^2 \leq \pi/2, \\ \bar{x}_3 &= 0,\end{aligned}\tag{4.105}$$

Die Abbildungsgleichungen haben nun die Gestalt

$$\begin{aligned}\bar{u}^1 &= u^1, \\ \bar{u}^2 &= u^2.\end{aligned}\tag{4.106}$$

Die Koeffizienten der ersten Grundformen von  $F$  und  $F^*$  ergeben sich zu

$$\begin{aligned}g_{11} &= r^2 \cos^2 u^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = r^2, \quad g = r^4 \cos^2 u^2, \\ \bar{g}_{11} &= r^2 \cos^2 \bar{u}^2, \quad \bar{g}_{12} = \bar{u}^1 r^2 \cos \bar{u}^2 \frac{\cos \bar{u}^2 - \left( \frac{\pi}{2} - \bar{u}^2 \right) \sin \bar{u}^2}{\left( \frac{\pi}{2} - \bar{u}^2 \right)}, \\ \bar{g}_{22} &= r^2 + r^2 (\bar{u}^1)^2 \left( \frac{\cos \bar{u}^2 - \left( \frac{\pi}{2} - \bar{u}^2 \right) \sin \bar{u}^2}{\frac{\pi}{2} - \bar{u}^2} \right)^2, \\ \bar{g} &= r^4 \cos^2 \bar{u}^2.\end{aligned}$$

Da wegen  $\bar{u}^1 = u^1$ ,  $\bar{u}^2 = u^2$  und  $\bar{g} = r^4 \cos^2 \bar{u}^2$ ,  $g = r^4 \cos^2 u^2$  die Beziehung

$$\bar{g} = g$$

gilt, ist die *Bonnesche Abbildung* auf Grund des Satzes 4.5 flächentreu. Die Bilder der Breitenkreise  $u^2 = C$  auf  $F$  sind Kreisbögen, die in Polarkoordinaten die Gleichung  $r^* = r(\pi/2 - C)$  haben. Für  $C = \pi/2$  ist  $r^* = 0$ . Das heißt, daß der Bildpunkt des Nordpols ( $u^2 = \pi/2$ ) der Mittelpunkt dieser Kreise und zugleich der Pol des Polarkoordinatensystems ist. Die Bildkurven zweier Meridiane schneiden auf den Bildern der Breitenkreise dieselben Längen wie auf der Kugeloberfläche ab. Tatsächlich erhält man für die Bogenelemente  $d_1 s$  und  $d_1 \bar{s}$  der Breitenkreise und ihrer Bilder

$$\begin{aligned}d_1 s &= \sqrt{g_{11}} du^1 = r \cos u^2 du^1, \\ d_1 \bar{s} &= \sqrt{\bar{g}_{11}} d\bar{u}^1 = r \cos \bar{u}^2 d\bar{u}^1\end{aligned}\tag{4.107}$$

und wegen (4.106), wie behauptet,

$$d_1 s = d_1 \bar{s}.$$

Diese Eigenschaft der Bonneschen Abbildung erleichtert die Konstruktion wesentlich. Bild 4.16 zeigt die Bonnesche Abbildung des Globus. Im allgemeinen ist die Längenverzerrung bei der Bonneschen Abbildung noch von der Richtung des Bogenelementes  $ds$  abhängig. Man findet

$$\bar{\lambda} = \frac{d\bar{s}}{ds} = \sqrt{\frac{\bar{g}_{11} + 2\bar{g}_{12}\lambda + \bar{g}_{22}\lambda^2}{g_{11} + g_{22}\lambda^2}} \quad \text{mit} \quad \lambda = \frac{du^2}{du^1}.$$

Die Längen auf den Breitenkreisen bezeichnet man auch als Abweitung. Daher ist die Bonnesche Abbildung der Erdoberfläche abweitungstreu und flächentreu.



Bild 4.16. Bonnesche Abbildung der Erdkugel

## Lösungen der Aufgaben

2.1: Man erhält

$$\dot{\mathbf{x}} = t\mathbf{i} + (1/t)\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}.$$

Hieraus folgt

$$|\dot{\mathbf{x}}| = \sqrt{t^2 + (1/t)^2 + 2} = \sqrt{(t + 1/t)^2} = |t + 1/t| = t + 1/t,$$

da  $t$  zwischen 1 und 4 liegt. Es ergibt sich für die Bogenlänge

$$s_{41} = s(4) - s(1) = \int_1^4 (t + 1/t) dt = [\tfrac{1}{2}t^2 + \ln |t|]_1^4 = 7,5 + 2 \ln 2 \approx 8,8863$$

Der Tangentenvektor der Raumkurve ergibt sich wie folgt:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{|t + 1/t|} (t\mathbf{i} + (1/t)\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k}).$$

Da  $t > 0$  ist, kann man

$$|t + 1/t| = t + 1/t$$

schreiben. (Wäre  $t < 0$ , so müßte man

$$|t + 1/t| = -(t + 1/t)$$

setzen.) Demnach findet man für  $t > 0$

$$\mathbf{t} = \frac{1}{1 + t^2} (t^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + t\sqrt{2}\mathbf{k}).$$

Es ergibt sich

$$\dot{\mathbf{t}} = \frac{1}{(t^2 + 1)^2} (2t\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \sqrt{2}(1 - t^2)\mathbf{k}).$$

Hieraus folgt wegen  $\mathbf{n} = \dot{\mathbf{t}}/|\dot{\mathbf{t}}|$  für den Hauptnormalenvektor im Fall  $t > 0$

$$\mathbf{n} = \frac{1}{(1 + t^2)} (t\sqrt{2}\mathbf{i} - t\sqrt{2}\mathbf{j} + (1 - t^2)\mathbf{k}).$$

Aus  $\mathbf{b} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$  folgt schließlich

$$\mathbf{b} = \frac{1}{(1 + t^2)} (t + t^2\mathbf{j} - t\sqrt{2}\mathbf{k}).$$

2.2: Auf Grund von (2.32) findet man mit

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k},$$

$$\ddot{\mathbf{x}} = 2\mathbf{j} + 6t\mathbf{k},$$

$$\ddot{\ddot{\mathbf{x}}} = 6\mathbf{k},$$

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = 1 + 4t^2 + 9t^4, \quad \ddot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = 4(1 + 9t^2),$$

$$\dot{\mathbf{x}} \cdot \ddot{\mathbf{x}} = 2t(2 + 9t^2),$$

$$\kappa = 2 \frac{\sqrt{1 + 9t^2 + 9t^4}}{(\sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4})^3}.$$

Analog erhält man aus der Formel (2.40') wegen

$$(\dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) = \begin{vmatrix} 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 6t \\ 0 & 6 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\tau = \frac{3}{1 + 9t^2 + 9t^4}.$$

2.3: Ausgehend von den Frenetschen Ableitungsgleichungen erhält man durch Elimination von  $\mathbf{t}$  und  $\mathbf{b}$  die Gleichung

$$\mathbf{n}'' + \frac{2s}{2+s^2} \mathbf{n}' + \frac{2}{(2+s^2)^2} \mathbf{n} = \mathbf{0}.$$

Zerlegung in Komponenten ergibt

$$n_i'' + \frac{2s}{2+s^2} n_i' + \frac{2}{(2+s^2)^2} n_i = 0 \quad i = 1, 2, 3.$$

Mit dem Ansatz  $n_i = e^z$  erhält man eine Riccatische Gleichung, wenn man noch  $z' = u$  setzt,

$$u' + u^2 + \frac{2s}{2+s^2} u + \frac{2}{(2+s^2)^2} = 0.$$

Die Funktion  $u_0 = -\frac{s}{2+s^2}$  ist eine partikuläre Lösung dieser Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung findet man durch den Ansatz  $u = u_0 + \frac{1}{v}$ . Man erhält

$$v' = 1, \quad v(s) = s + C, \quad u = -\frac{s}{2+s^2} + \frac{1}{s+C},$$

$$z = -\frac{1}{2} \ln |2+s^2| + \ln |s+C| + \ln K, \quad z = \ln \left| \frac{K(s+C)}{\sqrt{2+s^2}} \right|.$$

Hieraus folgt

$$n_i = e^z = \frac{A_i s + B_i}{\sqrt{2+s^2}} \quad \text{mit} \quad K = A_i, \quad KC = B_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Aus den Anfangsbedingungen

$$n_1(0) = 0 = B_1/\sqrt{2}, \quad n_2(0) = 0 = B_2/\sqrt{2}, \quad n_3(0) = 1 = B_3/\sqrt{2}$$

folgt

$$B_1 = B_2 = 0, \quad B_3 = \sqrt{2}.$$

Aus  $t' = \kappa n$  folgt

$$t_i' = \frac{1}{2+s^2} \frac{A_i s + B_i}{\sqrt{2+s^2}}.$$

Durch Integration findet man

$$t_i = -\frac{A_i}{\sqrt{2+s^2}} + \frac{B_i s}{2\sqrt{2+s^2}} + C_i.$$

Analog ergibt sich aus  $\mathbf{b}' = -\tau \mathbf{n}$  durch Integration

$$b_i = -\frac{A_i}{\sqrt{2+s^2}} + \frac{B_i s}{2\sqrt{2+s^2}} + D_i.$$

Setzt man  $t_i, n_i, b_i$  in die zweite Frenetsche Formel  $n'_i = -\kappa t_i + \tau b_i$  ein, so erhält man  $C_i + D_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Aus den übrigen Anfangsbedingungen folgt

$$t_1(0) = 1/\sqrt{2} = -A_1/\sqrt{2} + C_1, \quad t_2(0) = 1/\sqrt{2} = -A_2/\sqrt{2} + C_2,$$

$$t_3(0) = 0 = -A_3/\sqrt{2} + C_3, \quad b_1(0) = 1/\sqrt{2} = -A_1/\sqrt{2} + D_1,$$

$$b_2(0) = -1/\sqrt{2} = -A_2/\sqrt{2} + D_2, \quad b_3(0) = 0 = -A_3/\sqrt{2} + D_3.$$

Es ergibt sich

$$D_1 = C_1 = 0, \quad D_3 = C_3 = 0, \quad C_2 = 1/\sqrt{2}, \quad D_2 = -1/\sqrt{2},$$

$$A_1 = -1, \quad A_2 = A_3 = 0.$$

Aus  $t_1 = x'_1 = 1/\sqrt{2+s^2}$  folgt  $x_1 = \operatorname{arsinh}(s/\sqrt{2}) + E_1$ , aus  $t_2 = x'_2 = 1/\sqrt{2}$  erhält man  $x_2 = s/\sqrt{2} + E_2$  und aus  $t_3 = x'_3 = \sqrt{2s}/(2\sqrt{2+s^2})$  schließlich  $x_3 = \sqrt{1+s^2}/2 + E_3$ . Wegen  $\mathbf{x}(0) = (0, 0, 1)$  folgt  $E_1 = E_2 = 0$ ,  $1 + E_3 = 1$ ,  $E_3 = 0$ . Damit hat man

$$\mathbf{x}(s) = \mathbf{i} \operatorname{arsinh}(s/\sqrt{2}) + \mathbf{j} s/\sqrt{2} + \mathbf{k} \sqrt{1+s^2}/2.$$

**2.4:** Es wird ein orthogonales  $x_1, x_2, x_3$ -Koordinatensystem eingeführt, dessen  $x_3$ -Achse mit der Achse des Kerns zusammenfällt. Sind  $M_1, M_2$  die Schnittpunkte der Mittellinien zweier benachbarter Drähte mit der  $x_1, x_2$ -Ebene, so gilt für den Winkel  $\alpha = \angle M_1 O M_2$ , unter dem die Strecke  $M_1 M_2$  vom Ursprung  $O$  aus erscheint,  $\alpha = 2\pi/N$ . Nimmt man weiter an, daß  $M_1$  auf der positiven  $x_1$ -Achse liegt, so folgt

$$\mathbf{x}(\varphi) = r \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \varphi \mathbf{j} + \frac{h}{2\pi} \varphi \mathbf{k}$$

für die Parameterdarstellung der Mittellinie des ersten Drahtes. Ist  $X'$  die orthogonale Projektion eines beliebigen Punktes  $X$  dieser Mittellinie in die  $x_1, x_2$ -Ebene, so ist  $\varphi$  der Winkel, den der Strahl  $OX'$  mit der positiven  $x_1$ -Achse bildet. Für die Mittellinie eines der beiden benachbarten Drähte ergibt sich dann

$$\bar{\mathbf{x}}(\varphi) = r \cos \varphi \mathbf{i} + r \sin \varphi \mathbf{j} + \frac{h}{2\pi} (\varphi - \alpha) \mathbf{k}$$

bzw. mit

$$\bar{\varphi} = \varphi - \alpha$$

$$\mathbf{x}^*(\bar{\varphi}) = \bar{\mathbf{x}}(\bar{\varphi} + \alpha) = r \cos(\bar{\varphi} + \alpha) \mathbf{i} + r \sin(\bar{\varphi} + \alpha) \mathbf{j} + \frac{h}{2\pi} \bar{\varphi} \mathbf{k}.$$

**2.5:** Ist  $X$  ein beliebiger Punkt der ersten Mittellinie und  $X_0$  der zugehörige Punkt auf der kreisförmigen Achse mit dem Radius  $R$ , so ergibt sich für die Koordinaten von  $X_0$ :  $x_1^0 = 0$ ,  $x_2^0 = R \cos \lambda \varphi$ ,  $x_3^0 = R \sin \lambda \varphi$ . Trägt man in  $X_0$  die zwei Vektoren  $\mathbf{i}$  und  $\mathbf{l} = \cos \lambda \varphi \mathbf{j} + \sin \lambda \varphi \mathbf{k}$  an, so bestimmen diese Vektoren eine durch  $X_0$  gehende Ebene, die von der kreisförmigen Achse in  $X^0$  senkrecht durchsetzt wird und die die Strecke  $XX_0$  enthält. Ist  $\mathbf{r} = \overrightarrow{X_0 X}$ , so folgt, wenn man berücksichtigt, daß die Strecke  $X_0 X$  infolge der Verschraubung mit dem Vektor  $\mathbf{i}$  den Winkel  $\varphi$  einschließt,  $\mathbf{r} = r(\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{l} \sin \varphi)$ .

Damit ergibt sich der Ortsvektor des Punktes  $X$  zu

$$\mathbf{x}(\varphi) = R \cos \lambda \varphi \mathbf{j} + R \sin \lambda \varphi \mathbf{k} + r(\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{l} \sin \varphi)$$

bzw.

$$\mathbf{x}(\varphi) = \mathbf{i}r \cos \varphi + \mathbf{j}(R + r \sin \varphi) \cos \lambda \varphi + \mathbf{k}(R + r \sin \varphi) \sin \lambda \varphi.$$

Für eine benachbarte Mittellinie erhält man

$$\bar{\mathbf{x}}(\varphi) = \mathbf{i}r \cos \varphi + \mathbf{j}(R + r \sin \varphi) \cos \lambda(\varphi - \alpha) + \mathbf{k}(R + r \sin \varphi) \sin \lambda(\varphi - \alpha)$$

bzw. mit  $\bar{\varphi} = \varphi - \alpha$

$$\mathbf{x}^*(\bar{\varphi}) = \mathbf{i}r \cos(\bar{\varphi} + \alpha) + \mathbf{j}(R + r \sin(\bar{\varphi} + \alpha)) \cos \lambda \bar{\varphi} + \mathbf{k}(R + r \sin(\bar{\varphi} + \alpha)) \sin \lambda \bar{\varphi}.$$

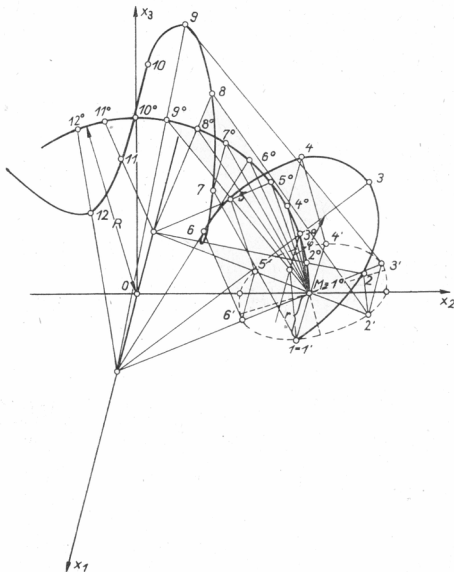


Bild L.2.5. Schraubenlinie mit kreisförmiger Achse

Die Differentiation von  $\mathbf{x}(\varphi)$  nach  $\varphi$  ergibt

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(\varphi) = & -\mathbf{i}r \sin \varphi + \mathbf{j}(r \cos \varphi \cos \lambda \varphi - (R + r \sin \varphi) \lambda \sin \lambda \varphi) \\ & + \mathbf{k}(r \cos \varphi \sin \lambda \varphi + (R + r \sin \varphi) \lambda \cos \lambda \varphi). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich

$$|\dot{\mathbf{x}}(\varphi)|^2 = r^2 + (R + r \sin \varphi)^2 \lambda^2,$$

und durch Integration von  $ds = |\dot{\mathbf{x}}(\varphi)| d\varphi$  erhält man schließlich

$$s(2\pi) = \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sqrt{r^2 + (R + r \sin \varphi)^2 \lambda^2} d\varphi.$$

Zur genäherten Auswertung dieses Integrals wird die Simpsonsche Regel verwendet (vgl. Band 2 Satz 10.15):

$$S = \frac{h}{3} (y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})).$$

Wählt man  $h = \frac{1}{2}\pi$ , so ergibt sich

$$s(2\pi) \approx \frac{2}{3}\pi (\sqrt{r^2 + R^2\lambda^2} + \sqrt{r^2 + (R+r)^2\lambda^2} + \sqrt{r^2 + (R-r)^2\lambda^2}).$$

**2.6:**  $\mathbf{x}(s)$  sei die Parameterdarstellung der Raumkurve mit  $\tau(s)/\kappa(s) = K$ . Hieraus folgt  $\tau = K\kappa$ ; wegen  $\mathbf{t}' = \kappa\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$  ergibt sich  $K\mathbf{t}' + \mathbf{b}' = \mathbf{0}$  und daraus  $K\mathbf{t} + \mathbf{b} = \mathbf{a}$ , wo  $\mathbf{a}$  ein konstanter Vektor ist. Es ist  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = K^2 + 1$ ,  $|\mathbf{a}| = \sqrt{K^2 + 1}$ . Nun ist  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = K$ , daher  $|\mathbf{a}| |\mathbf{t}| \cos(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = K$  und  $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{t}) = K/\sqrt{1 + K^2} = \text{konstant}$ , also ist durch  $\mathbf{x}(s)$  die Parameterdarstellung einer Böschungslinie gegeben.

Es sei umgekehrt  $\mathbf{x}(s)$  die Parameterdarstellung einer Böschungslinie. Dann existiert ein Vektor  $\mathbf{a}$  (konstant), der mit allen Tangentenvektoren  $\mathbf{t}$  der Raumkurve einen konstanten Winkel bildet. Da  $|\mathbf{t}| = 1$  gilt, ist somit  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{t} = k = \text{konstant}$ . Durch Differentiation folgt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}' = 0$  bzw.  $\mathbf{a} \cdot (\kappa\mathbf{n}) = 0$  und, da  $\kappa \neq 0$ ,  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Durch weitere Differentiation folgt  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}' = 0$ . Wegen  $\mathbf{b}' = -\tau\mathbf{n}$  ergibt sich  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' = -\tau\mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = 0$ . Andererseits ist auch  $\mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = 0$ , da  $\mathbf{a}' = \mathbf{0}$ . Mithin  $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})' = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}' + \mathbf{a}' \cdot \mathbf{b} = 0$  und  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = C = \text{konstant}$ . Aus der 2. Frenetschen Gleichung ergibt sich  $\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}' = \mathbf{a} \cdot (-\kappa\mathbf{t} + \tau\mathbf{b}) = -\kappa(\mathbf{a} \cdot \mathbf{t}) + \tau(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$  und damit  $-\kappa k + \tau C = 0$ . Daraus folgt die Behauptung  $\tau(s)/\kappa(s) = k/C = \text{const.}$

**3.1:** a) Für den Normalenabschnitt gilt:  $\overline{PN} = |y|\sqrt{1 + y'^2} = C$ , wo  $C$  eine positive Konstante ist. Durch Quadrieren folgt  $y^2(1 + y'^2) = C^2$  bzw.  $y'^2 = (C^2 - y^2)/y^2$ ,  $y' = \pm\sqrt{C^2 - y^2}/y$ . Trennung der Veränderlichen und Integration führt zu

$$\int \frac{y dy}{\sqrt{C^2 - y^2}} = \pm \int dx, \quad -\sqrt{C^2 - y^2} = \pm(x - x_0)$$

oder

$$(x - x_0)^2 + y^2 = C^2.$$

Man erhält Kreise, deren Mittelpunkte auf der  $x$ -Achse liegen und deren Radien die Länge  $C$  haben.

b)  $\overline{ST} = |y/y'| = K$ . Dabei ist  $K > 0$  die gegebene konstante Länge des Subtangentenabschnitts. Trennung der Veränderlichen ergibt

$$\int \frac{dy}{y} = \pm \int \frac{1}{K} dx.$$

Nach Integration folgt

$$\ln |y| - \ln C = \pm \frac{1}{K} x,$$

$$y = Ce^{x/K} \quad \text{oder} \quad y = Ce^{-x/K}; \quad -\infty < C < +\infty \quad (C \neq 0).$$

Es ergeben sich Exponentialkurven.

c) Analog wie bei a) und b) gilt  $\overline{SN} = |yy'| = K$ ,  $\pm \int y \, dy = \int K \, dx$  bzw.  $y^2 = \pm 2K(x - x_0)$ . Das sind Parabeln, deren Achsen mit der  $x$ -Achse zusammenfallen. Die Koordinaten des Scheitels  $S$  einer solchen Parabel sind  $x_S = x_0$ ,  $y_S = 0$ , die des Brennpunktes  $F$  sind  $x_F = x_0 \pm K/2$ ,  $y_F = 0$ .

3.2: Wählt man als Koordinatenursprung  $O$  den Punkt in der Mitte zwischen den beiden benachbarten Masten auf der Erdoberfläche; so hängt die Leitung an der Stelle  $x = 0$  am tiefsten. Setzt man den Abstand der zwei benachbarten Masten gleich  $2a$  und die Höhe der Leitung bei  $x = 0$  gleich  $u$ , so folgt aus Bild L.3.2a)  $u = h \cosh 0 + b = h + b$ ,  $l = h \cosh (a/h) + b$ . Hierin sind

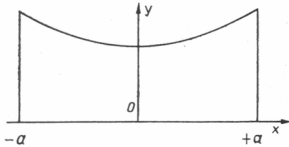


Bild L.3.2a). Zu Aufgabe 3.2

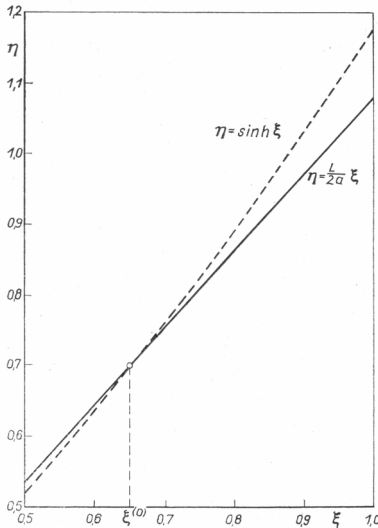


Bild L.3.2b). Zu Aufgabe 3.2



$u, h, b$  unbekannt. Um noch eine dritte Gleichung zu erhalten, berechnet man die Länge  $L$  der Leitung zwischen den zwei Masten. Mit  $y' = \sinh(x/h)$  folgt

$$\begin{aligned} L &= \int_{-a}^a \sqrt{1+y'^2} \, dx = \int_{-a}^a \sqrt{1+\sinh^2(x/h)} \, dx \\ &= \int_{-a}^a \cosh(x/h) \, dx = h[\sinh(x/h)]_{-a}^a = 2h \sinh(a/h). \end{aligned}$$

Damit erhält man ein Gleichungssystem für die Unbekannten  $u, h, b$ . Setzt man  $a/h = \xi$ ,  $l = h \cosh(a/h) + b$ ,  $L = 2h \sinh(a/h)$ , so folgt mit  $h = a/\xi$  aus der dritten Gleichung  $(L/2a)\xi = \sinh \xi$ . Man bestimmt graphisch einen Näherungswert für die Lösung dieser Gleichung, indem man die beiden Kurven  $\eta = \sinh \xi$  und  $\eta = (L/2a)\xi$  in einem  $\xi, \eta$ -System darstellt und ihren Schnittpunkt  $\xi^{(0)} \neq 0$  bestimmt (siehe Bild L.3.2b)). Man erhält den Näherungswert  $\xi^{(0)} = 0,65$ . Diesen verbessert man nach dem Newtonschen Verfahren (vgl. Band 2, 7.7.3.). Setzt man  $f(\xi) = (L/2a)\xi - \sinh \xi$ , so folgt mit  $L = 86 \text{ m}$ ,  $a = 40 \text{ m}$ ,  $f(\xi) = 1,075\xi - \sinh \xi$  und  $f'(\xi) = 1,075 - \cosh \xi$ . Mit  $\xi^{(0)} = 0,65$  ergibt sich  $f(0,65) = 0,0021$  und  $f'(0,65) = -0,1438$ . Damit findet man einen besseren Wert  $\xi^{(1)} = 0,65 + (0,0021/0,1438) \approx 0,665$ ,  $f(0,665) = -0,0002$ . Damit erhält man  $h = 60,2 \text{ m}$ ,  $b = l - h \cosh \xi^{(1)} = -49,01 \text{ m}$ ,  $u = h + b = 11,19 \text{ m}$ . Die Leitung hängt an ihrer tiefsten Stelle rund elf Meter über dem Erdboden.

3.3: Die Gleichung der Schleppkurve lautet nach Abschnitt 3.3. (S. 50)

$$x = x_0 \pm (k \ln |(k - \sqrt{k^2 - y^2})/y| + \sqrt{k^2 - y^2}).$$

Wir betrachten den Kurvenzweig, für den das negative Vorzeichen gilt und für den  $y > 0$  ist<sup>1)</sup>, weil die anderen Zweige durch Spiegelungen an der  $x$ -Achse bzw. der Geraden  $x = x_0$  aus diesem erhalten werden. Die Gleichung der Schleppkurve ist in der Form  $x = g(y)$  gegeben. Um die Krümmung für diese Kurve errechnen zu können, vertauscht man in der Formel für  $\kappa$  die Variable  $y$  mit  $x$ . Man setzt  $x' = dx/dy$ ,  $x'' = d^2x/dy^2$  und erhält

$$\kappa = x''/(\sqrt{1+x'^2})^3.$$

Nach einiger Rechnung ergibt sich

$$x' = \frac{-(k^2 - y^2)}{y\sqrt{k^2 - y^2}} = \frac{-\sqrt{k^2 - y^2}}{y}, \quad x'' = \frac{k^2}{y^2\sqrt{k^2 - y^2}},$$

woraus schließlich folgt

$$\kappa = \frac{y}{k\sqrt{k^2 - y^2}}, \quad \varrho = \frac{k\sqrt{k^2 - y^2}}{y}.$$

3.4: Es werde zunächst der Fall der Außenabrollung betrachtet. Während der Mittelpunkt des Rollkreises von seiner Ausgangslage  $M_0$  einen Kreisbogen  $\widehat{M_0M}$  mit dem Zentriwinkel  $\varphi = \sphericalangle M^0OM$  des festen Kreises mit dem Radius  $R + r$  durchläuft, rolle der Rollkreisbogen  $\widehat{P_0P'}$  mit dem Zentriwinkel  $\varphi = \sphericalangle P_0M_0P'_0$  auf dem festen Kreis vom Radius  $R$  ab. Daher gilt  $R\varphi = r\varphi$  (vgl. Bild 3.12). Zieht man von  $M$  einen Strahl  $MA$  parallel zur positiven  $x_1$ -Richtung, so ist der Winkel  $\sphericalangle AMX = 180^\circ - (\varphi + \psi)$ . Die Projektion des Streckenzuges  $OMX$  auf die  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Achse liefert daher

$$x_1 = (R + r) \cos \psi + l \cos (180^\circ - \varphi - \psi) = (R + r) \cos \psi - l \cos (\varphi + \psi),$$

$$x_2 = (R + r) \sin \psi - l \sin (180^\circ - \varphi - \psi) = (R + r) \sin \psi - l \sin (\varphi + \psi).$$

<sup>1)</sup> Das muß man beachten, weil wegen  $\sqrt{y^2} = |y|$  im Fall  $y > 0$   $\sqrt{y^2} = y$ , im Fall  $y < 0$  jedoch  $\sqrt{y^2} = -y$  gilt.

Hieraus folgt wegen  $\varphi = \frac{R}{r} \psi$

$$x_1 = (R + r) \cos \psi - l \cos \left( \frac{R + r}{r} \psi \right),$$

$$x_2 = (R + r) \sin \psi - l \sin \left( \frac{R + r}{r} \psi \right).$$

Für  $l > r$  erhält man eine verschlungene, für  $l < r$  eine gestreckte Epitrochoide. Ist  $l = r$ , so heißt die Kurve gespitzte Epitrochoide oder auch Epizykloide.

Bei Innenabrollung durchläuft der Rollkreismittelpunkt den Kreisbogen  $M_0M$  mit dem Zentriwinkel  $\psi = \sphericalangle M_0OM$  des Kreises mit dem Radius  $R - r$  um  $O$ . Ist  $\varphi$  wieder der Winkel des Rollkreisbogens, der auf dem festen Kreis vom Radius  $R$  abrollt, wobei  $P'_0$  in  $P$ ,  $X_0$  in  $X$  und  $M_0$  in  $M$  übergehen, so gilt wieder  $R\varphi = r\psi$  (Bild 3.12). Die Projektion des Streckenzuges  $OMX$  auf die  $x_1$ - bzw.  $x_2$ -Achse ergibt

$$x_1 = (R - r) \cos \psi + l \cos (\varphi - \psi) = (R - r) \cos \psi + l \cos \left( \frac{R - r}{r} \psi \right)$$

$$x_2 = (R - r) \sin \psi - l \sin (\varphi - \psi) = (R - r) \sin \psi - l \sin \left( \frac{R - r}{r} \psi \right).$$

Ist  $l < r$ , so liegt die Kurve ganz im Innern des festen Kreises. Man nennt sie gestreckte Hypotrochoide. Für  $l > r$  heißt die Kurve verschlungene Hypotrochoide. Sie verläuft innerhalb und außerhalb des festen Kreises. Im Fall  $l = r$  spricht man von einer gespitzten Hypotrochoide oder auch von einer Hypozykloide. Ist das Verhältnis der Radien  $R:r = m:n$  rational, so sind alle betrachteten Kurven geschlossen, und es gilt für den Parameter  $0 \leq \psi \leq 2n\pi$ . Dieses Parameterintervall für  $\psi$  reicht zur Darstellung aller dieser Kurven sowohl bei Innen- als auch bei Außenabrollung aus.

**3.5:** Es sei  $\varphi$  der Winkel, um den sich der Rollkreis beim Abrollen des Kreisbogens  $\widehat{X_0P_0}$  dreht. Dabei geht  $X_0$  in  $X$  und  $P_0$  in den Punkt  $P$  über. Mit  $\overline{OP} = \overline{X_0P} = r\varphi$  und  $\sphericalangle XMP = \varphi$  ergibt sich aus Bild L.3.5  $x_1 = r\varphi - r \sin \varphi$ ,  $x_2 = r - r \cos \varphi$ , wobei  $-\infty < \varphi < +\infty$  ist. Für den Tangens des Neigungswinkels der Tangente findet man  $\dot{x}_2 = \dot{x}_1 \tan \varphi = \sin \varphi / (1 - \cos \varphi)$ . Für  $\varphi = 0, \pm 2\pi, \dots, \pm 2k\pi$ , ist  $\dot{x}_2 = \pm \infty$ . Da die Kurve nur oberhalb der  $x_1$ -Achse verlaufen kann, hat sie in den genannten Punkten Spitzen.

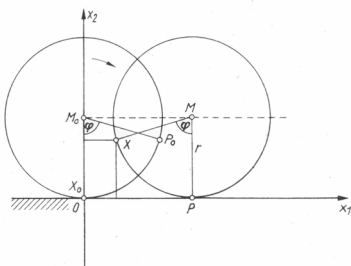


Bild L.3.5. Zu Aufgabe 3.5

3.6: Für das Bogenelement der Zykloide ergibt sich nach (2.17)

$$ds^2 = r^2(1 - 2 \cos \varphi + \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) d\varphi^2 = 2r^2(1 - \cos \varphi) d\varphi^2 = 4r^2 \sin^2(\varphi/2) d\varphi^2,$$

$$ds = 2r |\sin(\varphi/2)| d\varphi.$$

$$s(2\pi) = \int_0^{2\pi} 2r \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2r \left[ -2 \cos \frac{\varphi}{2} \right]_0^{2\pi} = 8r$$

(die Betragstriche beim Integranden können weggelassen werden, da  $\varphi$  zwischen 0 und  $2\pi$  variiert und dort  $\left| \sin \frac{\varphi}{2} \right| = \sin \frac{\varphi}{2}$  ist). Um  $\varrho$  zu berechnen, bildet man

$$\dot{x}_1 = r(1 - \cos \varphi), \quad \ddot{x}_1 = \dot{x}_2 = r \sin \varphi, \quad \ddot{x}_2 = r \cos \varphi.$$

Daraus folgt

$$\ddot{x}_2 \dot{x}_1 - \dot{x}_2 \ddot{x}_1 = r^2(\cos \varphi - \cos^2 \varphi) - r^2 \sin^2 \varphi = r^2(\cos \varphi - 1),$$

$$\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 = 4r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}.$$

Mit (3.10) ergibt sich

$$\varrho = -4r \sin(\varphi/2), \quad \varrho(\pi) = -4r.$$

3.7:  $F = by^2 - x^2(x - a) = 0, \quad F_x = -3x^2 + 2ax, \quad F_y = 2by,$

$$F_{xx} = -6x + 2a, \quad F_{yy} = 2b, \quad F_{xy} = 0.$$

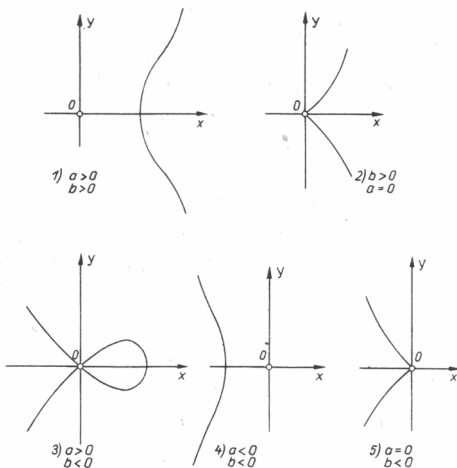


Bild L.3.7. Zu Aufgabe 3.7

Im Punkt  $O(0, 0)$  liegt ein singulärer Punkt vor. Man bildet die Diskriminante

$$\Delta = F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 4b(3x - a).$$

1)  $a > 0, b > 0, \Delta(0, 0) = -4ab < 0$ : Einsiedlerpunkt in  $O$ .

Aus der Gleichung  $F = 0$  folgt  $y = x\sqrt{(x-a)/b}$ , für  $0 < x < a$  gibt es keine reellen  $y$ -Werte.

2)  $b > 0, a = 0, \Delta(0, 0) = 0$ , Spitze in  $O$ .  $y = (x/b)\sqrt{x}$ . Es liegt eine Neilsche Parabel vor.

3)  $a > 0, b > 0, \Delta(0, 0) = -4ab > 0$ : Doppelpunkt in  $O$ .

4)  $a < 0, b < 0, \Delta(0, 0) = -4ab < 0$ : Einsiedlerpunkt in  $O$ .

5)  $a = 0, b < 0, \Delta(0, 0) = 0$ , Spitze in  $O$ : Neilsche Parabel.

In Bild L.3.7 sind die fünf verschiedenen Kurven skizziert.

**3.8: a)**  $r(\varphi) = a\varphi, r' = a, \cot \psi = r'/r = 1/\varphi$ . Mit  $\varphi \rightarrow \infty$  geht  $\cot \psi \rightarrow 0$ .

Mit wachsenden Werten von  $\varphi$  schneidet die Kurve die Radien mehr und mehr unter einem rechten Winkel.

Die archimedische Spirale besteht aus zwei im Ursprung ineinander übergehenden Ästen. Der eine enthält die Punkte mit  $\varphi > 0$ , der andere die mit  $\varphi < 0$ . Beide beginnen im Ursprung und wickeln sich spiralförmig um den Punkt  $\varphi = \pi/2, r = a(\pi/4)$ , der eine im mathematisch positiven, der andere im mathematisch negativen Sinn (siehe Bild L.3.8a)). Die Kurve schneidet den Strahl  $\varphi = 0$  (posi-

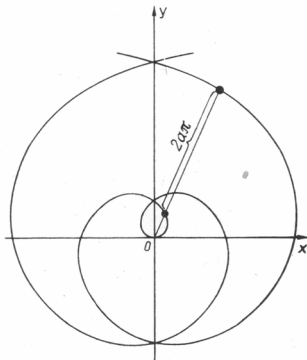


Bild L.3.8a). Archimedische Spirale

tive  $x$ -Achse) bei  $r = 0, -a\pi, 2a\pi, -3a\pi, \dots, (-1)^k ak\pi, \dots$  und den Strahl  $\varphi = \pi$  (negative  $x$ -Achse) bei  $r = a\pi, -2a\pi, 3a\pi, -4a\pi, \dots, (-1)^{k+1} ak\pi$  usw. Die Differenz  $r(\varphi + 2\pi) - r(\varphi)$  ist für alle Werte von  $\varphi$  konstant:  $r(\varphi + 2\pi) - r(\varphi) = 2a\pi$ . Für die Bogenlänge findet man mit  $r = a\varphi, r' = a$  aus (3.3)

$$s(\varphi) = a \int_0^\varphi \sqrt{1 + \varphi^2} d\varphi = \frac{a}{2} (\ln(\varphi + \sqrt{1 + \varphi^2}) + \varphi \sqrt{1 + \varphi^2}).$$

(Das Integral findet man durch die Substitution  $\varphi = \sinh t$  und anschließende partielle Integration.) Die Formel ist praktisch nicht sehr brauchbar. Besser ist die von R. Rothe angegebene Näherungsformel  $s(\varphi) \approx \frac{a}{2} (\varphi^2 + \ln \varphi + 1,193)$  für große Werte von  $\varphi$  (vgl. [12], S. 159).

b) Je größer  $\varphi$  wird, desto mehr nähert sich  $r(\varphi) = a/\varphi$  dem Wert 0. Der Ursprung  $O$  ist ein asymptotischer Punkt der Kurve, den sie aber erst erreicht, nachdem sie sich unendlich oft spiralförmig um ihn herumgewunden hat. Die Kurve besteht aus zwei spiegelbildlichen Teilen, die symmetrisch zur  $y$ -Achse liegen. Für  $\varphi \rightarrow 0$  nähert sich die Kurve der Geraden  $y = a$ , die eine geradlinige Asymptote der Kurve ist. Denn es gilt  $y = r \sin \varphi = (a \sin \varphi)/\varphi$ :

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} y = \lim_{\varphi \rightarrow 0} (a \sin \varphi)/\varphi = a \quad (\text{Bild L.3.8b}).$$

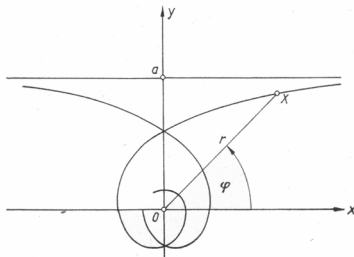


Bild L.3.8b). Hyperbolische Spirale

c) Logarithmische Spirale  $r(\varphi) = e^{a\varphi}$ ,  $a > 0$ . Für  $a = 0$  ergibt sich ein Kreis um  $O$  mit dem Radius 1. Für  $\varphi \rightarrow -\infty$  geht  $r$  gegen 0. Daher ist der Ursprung  $O$  ein asymptotischer Punkt der Kurve. Aus  $r = e^{a\varphi}$ ,  $r' = ae^{a\varphi}$  folgt  $\cot \psi = r'/r = a = \text{const.}$  Der Winkel  $\psi$  zwischen  $r$  und

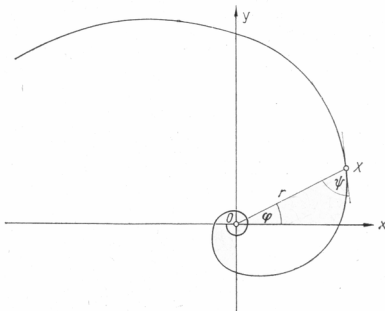


Bild L.3.8c). Logarithmische Spirale

der Kurventangente ist konstant. Die logarithmische Spirale schneidet alle von ihrem asymptotischen Punkt ausgehenden Strahlen unter konstantem Winkel. Für die Bogenlänge erhält man

$$s(\varphi) = \int_{\varphi_0}^{\varphi} e^{a\varphi} \sqrt{1+a^2} d\varphi = \sqrt{1+a^2} \frac{1}{a} [e^{a\varphi}]_{\varphi_0}^{\varphi} = \sqrt{1+a^2} (r(\varphi) - r(\varphi_0)).$$

Mit  $\varphi_0 \rightarrow -\infty$  folgt hieraus  $s = \sqrt{1+a^2}r$ . Die Bogenlänge eines Kurvenbogens gemessen vom asymptotischen Punkt bis zu einem beliebigen Punkt ist proportional zum Radius dieses Punktes. Für den Krümmungsradius gilt  $\varrho = as$ .

3.9: Aus Bild 3.18 folgt durch Anwendung des Sinussatzes

$$r/r_0 = \sin(180^\circ - \alpha)/\sin \beta, \quad \beta = 180^\circ - (180^\circ - \alpha) - \varphi = \alpha - \varphi.$$

Damit ergibt sich

$$r = r_0 \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)}$$

als Polargleichung der Geraden.

3.10: Wegen  $r = a$ ,  $r' = 0$  erhält man aus (3.38) durch Integration  $s(\alpha) = a\alpha$ . Der Flächeninhalt des Kreissektors mit dem Zentriwinkel  $\alpha$  ergibt sich zu  $F = \frac{1}{2} \int_0^\alpha r^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\alpha$ .

3.11: Aus dem rechtwinkligen Dreieck  $OAP$  (Bild L.3.11) folgt unmittelbar

$$r(\varphi) = 2r_0 \cos(\varphi - \varphi_0).$$

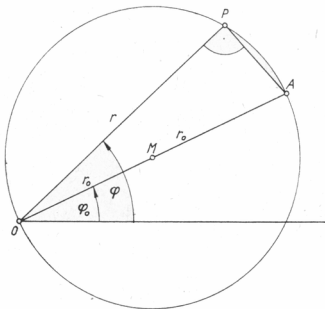


Bild L.3.11. Zu Aufgabe 3.11

3.12: Wegen  $r(-\varphi) = r(\varphi)$  ist die Kurve symmetrisch zum Strahl  $\varphi = 0$ . Den Verlauf der Kurve findet man mit Hilfe einer Wertetabelle. Im Bild L.3.12 auf Seite 131 ist die Kurve dargestellt. Aus  $r = 2a \cos \varphi + 2a$  folgt

$$r' = -2a \sin \varphi, \quad r'' = -2a \cos \varphi,$$

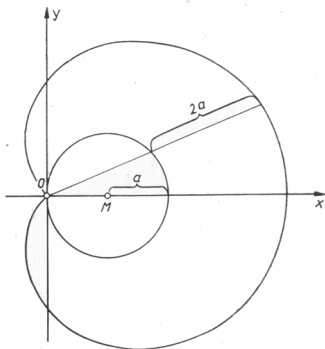


Bild L.3.12. Kardioiden

$$ds = 2a \sqrt{2(1 + \cos \varphi)} d\varphi = 2a \sqrt{4 \cos^2(\varphi/2)} d\varphi = 4a |\cos(\varphi/2)| d\varphi.$$

Da sich  $\varphi$  bei einem Umlauf von 0 bis  $2\pi$  ändert, ergibt sich für die Bogenlänge

$$s(2\pi) = 4a \int_0^{2\pi} |\cos(\varphi/2)| d\varphi = 8a \int_0^{\pi} \cos(\varphi/2) d\varphi = 8a \cdot 2[\sin(\varphi/2)]_0^{\pi} = 16a,$$

denn es gilt  $s(2\pi) = 2s(\pi)$  und  $|\cos(\varphi/2)| = \cos(\varphi/2)$  für  $0 \leq \varphi \leq \pi$ . Für den Krümmungsradius erhält man aus (3.41) mit

$$\sqrt{r^2 + (r')^2} = 4a |\cos(\varphi/2)|, \quad r^2 - rr'' + 2(r')^2 = 12a^2(1 + \cos \varphi) = 24a^2 \cos^2(\varphi/2)$$

den Ausdruck

$$\varrho(\varphi) = \frac{8a}{3} |\cos(\varphi/2)|, \quad \varrho(0) = \frac{8}{3} a.$$

Schließlich findet man für den Inhalt der von der Kurve umschlossenen Fläche

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi = \int_0^{\pi} 4a^2(1 + \cos \varphi)^2 d\varphi = 4a^2 \int_0^{\pi} (1 + 2\cos \varphi + \cos^2 \varphi) d\varphi \\ &= 4a^2([\varphi]_0^{\pi} + 2[\sin \varphi]_0^{\pi} + [\varphi/2 + \sin 2\varphi/4]_0^{\pi}) = 6a^2\pi. \end{aligned}$$

**3.13:** Aus Bild L.3.13 erkennt man, daß  $O, P, P^*$  stets auf einer Geraden liegen.  $M$  sei der gemeinsame Mittelpunkt der Strecken  $PP^*$  und  $AB$ . Dann gilt  $r = \overline{OM} + \overline{MP}$ ,  $r^* = \overline{OM} - \overline{MP^*} = \overline{OM} - \overline{MP}$ ,  $(\overline{OM})^2 = a^2 - (\overline{AM})^2$  sowie  $(\overline{MP})^2 = b^2 - (\overline{AM})^2$ . Damit findet man  $r \cdot r^* = (\overline{OM})^2 - (\overline{MP})^2 = a^2 - (\overline{AM})^2 - b^2 + (\overline{AM})^2 = a^2 - b^2$ . Nimmt man an, daß sich  $P$  auf einer Geraden bewegt, die nicht durch  $O$  geht, ihre Polargleichung (vgl. Aufgabe 3.9) laute  $r = \frac{r_0 \sin \alpha}{\sin(\alpha - \varphi)}$ , dann folgt  $r^* = \frac{a^2 - b^2}{r} = \frac{(a^2 - b^2)}{r_0 \sin \alpha} \sin(\alpha - \varphi) = \frac{a^2 - b^2}{r_0 \sin \alpha} \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ .

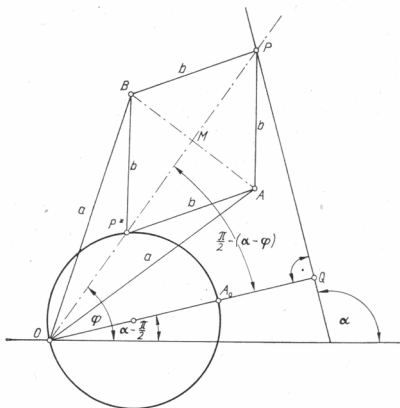


Bild L.3.13. Zu Aufgabe 3.13

Zieht man von  $O$  den zur Geraden senkrechten Strahl  $OQ$ , so ist  $\angle P^*OQ = \pm \left( \varphi + \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ . Wählt man auf dem Strahl  $OQ$  den Punkt  $A_0$  mit  $\overline{OA_0} = \frac{a^2 - b^2}{r_0 \sin \alpha}$ , so folgt aus  $r^* = \overline{OA_0} \cos \left( \varphi + \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$  und  $\angle P^*OA^0 = \pm \left( \varphi + \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$ , daß  $\angle A_0P^*O$  ein Rechter ist. Da dies für jedes  $\varphi$ , für den  $P$  auf der Geraden liegt, zutrifft, bewegt sich  $P^*$  auf dem Kreis mit dem Durchmesser  $OA_0$ .

**3.14:** Die Gleichung der Evolute ergibt sich aus der Parameterdarstellung (3.42), wenn man hierin  $y', y''$  mit Hilfe der Parabelgleichung  $y^2 = 2px$  ausdrückt. Man erhält  $\xi = 3x + p$ ,  $\eta = \mp 4x \sqrt{x}/\sqrt{2p}$  als Parameterdarstellung der Evolute der Parabel, wobei die Quadratwurzel mit doppelten Vorzeichen auftreten kann. Elimination von  $x$  ergibt  $(\xi - p)^3 = \frac{27}{8} p \eta^2$ . Dies ist die Gleichung einer Neilschen Parabel. Sie ist symmetrisch zur  $x$ -Achse, wenn man beachtet, daß die  $\xi$ -Achse mit der  $x$ -Achse und die  $\eta$ -Achse mit der  $y$ -Achse identisch ist. Sie hat bei  $\xi = p$ ,  $\eta = 0$  eine Spitze. Ersetzt man in der Parameterdarstellung der Evolute  $x$  durch  $t$ ,  $0 \leq t < +\infty$ , so folgt  $\xi = 3t + p$ ,  $\eta = \mp 4t \sqrt{t}/\sqrt{2p}$ . Für die Parabel ergibt sich  $x = \tau$ ,  $y = \sqrt{2p\tau}$  mit  $0 \leq \tau < +\infty$ , wo  $\tau$  einen reellen Parameter bezeichnet. Um den Schnittpunkt beider Kurven zu erhalten, setzt man  $\tau = 3t + p$ ,  $-\sqrt{2p\tau} = -4t \sqrt{t}/\sqrt{2p}$ . Hieraus folgt  $-\sqrt{2p(3t + p)} = -4t \sqrt{t}/\sqrt{2p}$  und nach Quadrieren  $2p(3t + p) = \frac{8t^3}{p}$  bzw.  $4t^3 = 3p^2t + p^3$ . Man sieht, daß  $t_1 = p$  eine Lösung dieser Gleichung ist und findet  $\tau_1 = 4p$  und damit als die Koordinaten eines Schnittpunktes  $S_1$  beider Kurven  $\xi_1 = 4p = x_1$ ,  $\eta_1 = -2\sqrt{2p} = y_1$ . Ein zweiter Schnittpunkt ergibt sich daraus durch Spiegelung an der  $x$ -Achse. Er hat die Koordinaten  $\xi_2 = x_2 = 4p$ ,  $\eta_2 = y_2 = 2\sqrt{2p}$ . Die kubische Gleichung besitzt noch eine Doppellösung  $t_2 = t_3 = -\frac{p}{2}$ , die aber zu keinen reellen Schnittpunkten der zwei Kurven führt.



**3.15:** Rollt eine Kurve auf einer Geraden ab, so führt diese Gerade relativ zur Ebene der Kurve ebenfalls eine Bewegung aus. Diese Relativbewegung soll als Abrollen der Geraden auf der Kurve bezeichnet werden. Eine Evolvente einer Kurve entsteht nun, wenn eine Gerade auf dieser Kurve abrollt, indem jeder Punkt der Geraden eine solche Evolvente in der Ebene der Kurve beschreibt.

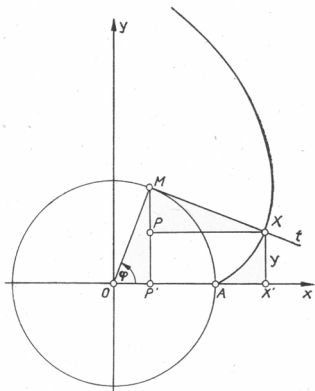


Bild L.3.15. Kreisevolvente

Im Fall des Kreises ergibt sich aus Bild L.3.15  $x = \overline{OX'} = \overline{OP'} + \overline{P'X'}$ ,  $y = \overline{X'X} = \overline{MP'} - \overline{MP}$ . Mit  $\overline{OP'} = a \cos \varphi$ ,  $\overline{MX} = \overline{MA} = a\varphi$ ,  $\overline{P'X'} = \overline{PX} = a\varphi \sin \varphi$ ,  $\overline{MP'} = a \sin \varphi$  und  $\overline{MP} = a\varphi \cos \varphi$  erhält man  $x = a \cos \varphi + a\varphi \sin \varphi$ ,  $y = a \sin \varphi - a\varphi \cos \varphi$ . Daraus folgt

$$ds = \sqrt{(a\varphi)^2(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} d\varphi = a |\varphi| d\varphi.$$

Nimmt man an, daß  $\varphi > 0$  ist, so hat man  $ds = a\varphi d\varphi$ , woraus durch Integration

$$s(\varphi) = \int_0^\varphi a\varphi d\varphi = a\varphi^2/2$$

folgt.

Es ergibt sich mit  $\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = a\varphi$  und  $\ddot{y}\dot{x} - \dot{y}\ddot{x} = (a\varphi)^2$

$$\varrho = (a\varphi)^3/a^2\varphi^2 = a\varphi.$$

Betrachtet man die durch einen beliebigen Punkt  $X$  der Kreisevolvente gehende Normale, so berührt diese den Kreis in einem Punkt  $M$ .  $M$  ist der zu  $X$  gehörige Krümmungsmittelpunkt und der Krümmungsradius  $\varrho = \overline{MX}$  ist gleich der Länge  $a\varphi$  des Kreisbogens, auf dem die Gerade abgerollt ist.

**3.16:** Führt man nach Bild 3.23 ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit dem Ursprung  $O$  und der  $x$ - bzw.  $y$ -Achse ein, so umhüllt das Brett von der Länge  $l$  bei der Einführung in den Hohlraum eine Astroide. Die Gleichung dieser Astroide lautet  $x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3}$ . Damit das Brett eingeführt werden kann, muß die Höhe der Öffnung mindestens so groß sein, daß die Hüllkurve durch die Öffnung in

das Innere verlaufen kann. Es muß also die Ordinate  $y$  der Kurve an der Stelle  $x = a$  kleiner sein als die Höhe  $h$  der Öffnung. Es gilt  $a^{1/3} + y^{1/3} = l^{1/3}$  bzw.  $y = (\sqrt[3]{l^{1/3} - a^{1/3}})^3$ . Mithin findet man  $h \geq (\sqrt[3]{l^{1/3} - a^{1/3}})^3$  als Bedingung für das ungehinderte Einführen des Brettes bei Vernachlässigung der Brettdicke.

In Wirklichkeit muß  $h$  größer sein als die errechnete untere Schranke, weil das Brett eine endliche Dicke hat. Ist die Brettdicke  $d$  klein gegen  $l$ , so ist  $h \geq (\sqrt[3]{l^{1/3} - a^{1/3}})^3 + \Delta$ . Dabei ist  $\Delta = d/\cos \alpha$ , und  $\alpha$  ist der Neigungswinkel der Tangente der Hüllkurve an der Stelle  $x = a$ . Es gilt  $\tan \alpha = -\sqrt[3]{l^{1/3} - a^{1/3}}/a^{1/3}$ , woraus mit  $\cos \alpha = 1/\sqrt[3]{1 + y'^2}$  schließlich  $\Delta = d(l/a)^{1/3}$  folgt.

**3.17:** Da die Astroide eine Kurve mit vier Spitzen ist, muß, wenn sie eine Hypozykloide sein soll,  $R:r = 4:1$  und  $l = r$  sein. Nach Aufgabe 3.4 lautet die Parameterdarstellung einer Hypotrochoide für  $R = 4r$ ,  $l = r$ ,  $x_1 = 3r \cos \psi + r \cos(3\psi)$ ,  $x_2 = 3r \sin \psi - r \sin(3\psi)$ . Wegen  $\cos(3\psi) = \cos^3 \psi - 3 \cos \psi \sin^2 \psi$ ,  $\sin(3\psi) = 3 \cos^2 \psi \sin \psi - \sin^3 \psi$  ergibt sich

$$x_1 = r(3 \cos \psi + \cos^3 \psi - 3 \cos \psi \sin^2 \psi) = r(3 \cos \psi(1 - \sin^2 \psi) + \cos^3 \psi) = 4r \cos^3 \psi,$$

$$x_2 = r(3 \sin \psi - 3 \cos^2 \psi \sin \psi + \sin^3 \psi) = r(3 \sin \psi(1 - \cos^2 \psi) + \sin^3 \psi) = 4r \sin^3 \psi.$$

Damit erhält man wegen  $4r = R$  schließlich

$$x_1 = R \cos^3 \psi, \quad x_2 = R \sin^3 \psi.$$

Das ist aber die Parameterdarstellung einer Astroide. Demnach ist eine Hypozykloide mit dem Radienverhältnis  $R:r = 4:1$  stets eine Astroide.

**3.18:** Die Gleichung der Normalen durch den Punkt  $X(x, y)$  der ebenen Kurve mit der Gleichung  $y = f(x)$  lautet (wobei  $\xi, \eta$  die laufenden Koordinaten sind, vgl. (3.17))  $(\eta - f(x))f'(x) + (\xi - x) = 0$ . Um die Hüllkurve dieser Geradenschar zu bestimmen, differenziert man diese Gleichung nach dem Parameter  $x$  und erhält  $-(f'(x))^2 + (\eta - f(x))f''(x) - 1 = 0$ . Hieraus folgt  $\eta = f(x) + [1 + (f'(x))^2]/f''(x)$  und nach Einsetzen in die ursprüngliche Gleichung  $\xi = x - f'(x)[1 + (f'(x))^2]/f''(x)$ . Diese beiden Gleichungen für  $\xi$  und  $\eta$  stellen eine Parameterdarstellung der Evolute der Kurve  $y = f(x)$  dar (vgl. (3.42)). Die Normalen einer ebenen Kurve umhüllen bekanntlich die Evolute dieser Kurve.

**3.19:** Die Mittelpunkte der Kreise der gegebenen Kreismannigfaltigkeit liegen auf einem Kreis mit der Gleichung  $(x - d/2)^2 + (y)^2 = (d/2)^2$ . Ein beliebiger Kreis der Mannigfaltigkeit hat die Gleichung  $x^2 + y^2 - 2xd \cos 2\alpha - 2yd \sin 2\alpha = 0$ . Mit den Beziehungen  $2 \sin \alpha \cos \alpha = \sin 2\alpha$  und  $2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$  ergibt sich daraus  $x^2 + y^2 - xd(1 + \cos 2\alpha) - yd \sin 2\alpha = 0$ . Um die Hüllkurve dieser Kurvenschar zu erhalten, differenzieren wir die letzte Gleichung nach dem Parameter  $\alpha$  und erhalten zusammen mit der ursprünglichen Gleichung das System

$$\begin{aligned} xd \cos 2\alpha + yd \sin 2\alpha &= x^2 + y^2 - xd, \\ -yd \cos 2\alpha + xd \sin 2\alpha &= 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Um  $\alpha$  zu eliminieren, faßt man  $\cos 2\alpha$  und  $\sin 2\alpha$  als Unbekannte auf und findet für  $x, y \neq 0$

$$\cos 2\alpha = x(x^2 + y^2 - xd)/[d(x^2 + y^2)], \quad \sin 2\alpha = y(x^2 + y^2 - xd)/[d(x^2 + y^2)].$$

Wegen  $\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1$  ergibt sich  $(x^2 + y^2)((x^2 + y^2)^2 - 2xd(x^2 + y^2) - d^2 y^2) = 0$ . Da  $x = y = 0$  der Bedingung (\*) genügt, besteht die gesuchte Hüllkurve aus dem Ursprung  $O$  und allen Punkten mit reellen Koordinaten  $x, y$ , für die der zweite Faktor verschwindet. Damit erhält man  $(x^2 + y^2)^2 - 2xd(x^2 + y^2) - d^2 y^2 = 0$  als Gleichung für die Hüllkurve. Um die Art der Kurve noch besser zu erkennen, führt man Polarkoordinaten ein. Man setzt  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$  und findet  $r^2(r^2 - 2rd \cos \varphi - d^2 \sin^2 \varphi) = 0$ , woraus  $r = 0$  und  $r^2 - 2rd \cos \varphi - d^2 \sin^2 \varphi = 0$  folgt. Nach Auflösung ergibt sich  $r = d \cos \varphi \pm d$ . Dies stellt bei beiden Vorzeichen die Gleichung ein und derselben Kardioiden dar (vgl. Aufgabe 3.12). Die gesuchte Hüllkurve ist eine Kardioiden, deren Spitze im Ursprung  $O$  liegt und die symmetrisch zur  $x$ -Achse ist, wobei der Kreis, aus dem die Kardioiden abgeleitet werden kann, der Kreis der Mittelpunkte ist.

4.1: a) Zerlegt man die vektorielle Parameterdarstellung in drei skalare Gleichungen, so erhält man  $x_1 = a \sin u^1 \cos u^2$ ,  $x_2 = b \sin u^1 \sin u^2$ ,  $x_3 = c \cos u^1$ ,  $0 \leq u^1 \leq \pi$ ,  $0 \leq u^2 \leq 2\pi$ . Dividiert man jede der drei Gleichungen durch  $a$  bzw.  $b$  bzw.  $c$ , quadriert und addiert, so ergibt sich

$$\begin{aligned} (x_1/a)^2 + (x_2/b)^2 + (x_3/c)^2 &= \sin^2 u^1 \cos^2 u^2 + \sin^2 u^1 \sin^2 u^2 + \cos^2 u^1 \\ &= \sin^2 u^1 (\cos^2 u^2 + \sin^2 u^2) + \cos^2 u^1 = \sin^2 u^1 + \cos^2 u^1 = 1. \end{aligned}$$

Das ist die Gleichung eines Ellipsoids mit den Halbachsen  $a, b, c$  und dem Mittelpunkt  $O(0, 0, 0)$ . Für die Ableitungsvektoren findet man

$$\mathbf{x}_{u^1} = a \cos u^1 \cos u^2 \mathbf{i} + b \cos u^1 \sin u^2 \mathbf{j} - c \sin u^1 \mathbf{k},$$

$$\mathbf{x}_{u^2} = -a \sin u^1 \sin u^2 \mathbf{i} + b \sin u^1 \cos u^2 \mathbf{j}.$$

Damit erhält man für die  $g_{\nu\mu}$ :

$$g_{11} = a^2 \cos^2 u^1 \cos^2 u^2 + b^2 \cos^2 u^1 \sin^2 u^2 + c^2 \sin^2 u^1,$$

$$g_{12} = -(a^2 - b^2) \cos u^1 \sin u^1 \cos u^2 \sin u^2,$$

$$g_{22} = a^2 \sin^2 u^1 \sin^2 u^2 + b^2 \sin^2 u^1 \cos^2 u^2.$$

Das Gaußsche  $u^1, u^2$ -Koordinatensystem ist hier nicht orthogonal, da i. allg.  $g_{12} \neq 0$ . Die Darstellung ist in den Punkten  $C_1(u^1 = 0, 0 \leq u^2 \leq 2\pi)$  bzw.  $C_2(u^1 = \pi, 0 \leq u^2 \leq 2\pi)$  nicht zulässig, da  $\mathbf{I}$  in  $C_1, C_2$  den Rang 1 hat. Für  $u^2 = C$  erhält man die  $u^1$ -Linien. Es gilt  $x_2/x_1 = b \tan C/a$ . Die  $u^1$ -Linien sind die Schnittkurven der durch die  $x_3$ -Achse gehenden Ebenen  $x_2 = m x_1$  mit dem Ellipsoid. Es sind Ellipsen. Für die  $u^2$ -Linien gilt  $u^1 = K$ . Dann folgt  $x_3 = c \cos K$ ,  $(x_1/a)^2 + (x_2/b)^2 = \sin^2 K$ . Die  $u^2$ -Linien sind die Schnittkurven des Ellipsoids mit den zur  $x_1, x_2$ -Ebene parallelen Ebenen  $x_3 = \text{const}$ . Daher sind die  $u^2$ -Linien ebenfalls Ellipsen.

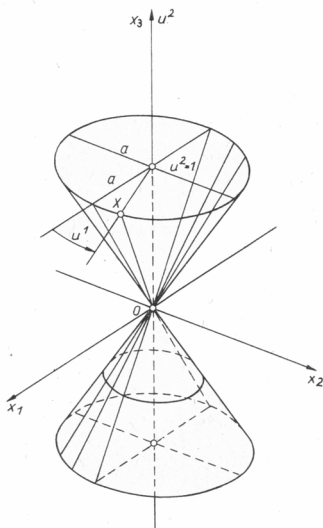


Bild L.4.1. Gerader Kreiskegel

b) Die  $u^1$ -Linien ( $u^2 = C$ )  $x_1 = u^1 \cos C$ ,  $x_2 = u^1 \sin C$ ,  $x_3 = au^1$  sind Geraden durch  $O$ . Die  $u^2$ -Linien ( $u^1 = K$ )  $x_1 = K \cos u^2$ ,  $x_2 = K \sin u^2$ ,  $x_3 = aK$  sind wegen  $x_1^2 + x_2^2 = K^2$ ,  $x_3 = aK$  Kreise in Ebenen parallel zur  $x_1, x_2$ -Ebene, deren Mittelpunkte auf der  $x_3$ -Achse liegen.

Jede  $u^1$ -Linie schneidet alle  $u^2$ -Linien, denn für  $u^1 = K$  folgt  $x_1 = K \cos C$ ,  $x_2 = K \sin C$ ,  $x_3 = aK$  und die Koordinaten dieser Punkte erfüllen die Gleichungen der  $u^2$ -Linie  $x_1^2 + x_2^2 = K^2$ ,  $x_3 = aK$ . Daher ist die durch die Parameterdarstellung gegebene Fläche ein Rotationskegel mit der Spitze in  $O$  und der  $x_3$ -Achse als Kegelachse. Die  $u^1$ -Linien sind die Mantellinien des Kegels, und da  $-\infty < u^1 < +\infty$  gilt, ist der Kegel ein Doppelkegel. Die Ableitungsvektoren lauten

$$\mathbf{x}_{u^1} = \cos u^2 \mathbf{i} + \sin u^2 \mathbf{j} + a \mathbf{k}, \quad \mathbf{x}_{u^2} = -u^1 \sin u^2 \mathbf{i} + u^1 \cos u^2 \mathbf{j}.$$

Hieraus folgt

$$g_{11} = \mathbf{x}_{u^1} \cdot \mathbf{x}_{u^1} = 1 + a^2, \quad g_{12} = \mathbf{x}_{u^1} \cdot \mathbf{x}_{u^2} = 0, \quad g_{22} = \mathbf{x}_{u^2} \cdot \mathbf{x}_{u^2} = (u^1)^2.$$

Die Parameterdarstellung ist in den Punkten  $Q(u^1 = 0, 0 \leq u^2 \leq 2\pi)$ , nicht zulässig, da  $\mathbf{I}$  in  $Q$  den Rang 1 hat. Der Ursprung  $O$  ist ein singulärer Punkt der Fläche (s. Aufg. 4.2).

4.2: Die Matrix  $\mathbf{I}$  (vgl. 4.1.1.) hat für einen beliebigen Punkt  $X$  der Fläche die Gestalt

$$\mathbf{I}(X) = \begin{pmatrix} \cos u^2 & -u^1 \sin u^2 \\ \sin u^2 & u^1 \cos u^2 \\ a & 0 \end{pmatrix} = (\mathbf{x}_{u^1}, \mathbf{x}_{u^2}),$$

wobei  $\mathbf{x}_{u^1}$ ,  $\mathbf{x}_{u^2}$  als Spaltenvektoren zu schreiben sind. Für den Punkt  $O$  gilt  $u^1 = u_0^1 = 0$ ,  $0 \leq u^2 \leq 2\pi$ . Wie bereits in der Lösung zur Aufgabe 4.1. b) bemerkt wurde, hat  $\mathbf{I}(O)$  den Rang 1, und  $O$  ist singulär bezüglich der gewählten Parameterdarstellung  $\mathbf{x}(u^1, u^2)$ . Um zu zeigen, daß  $O$  bezüglich jeder zulässigen Parameterdarstellung der Fläche singulär ist, führen wir mit Hilfe einer zulässigen Koordinatentransformation  $u^1 = \bar{u}^1(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ ,  $u^2 = \bar{u}^2(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$  neue Koordinaten  $\bar{u}^1$ ,  $\bar{u}^2$  auf der Fläche ein (vgl. 4.1.8.). Der Punkt  $O$  wird dann im  $\bar{u}^1\bar{u}^2$ -Koordinatensystem durch ein Koordinatenpaar  $(\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2)$  repräsentiert, das die Bedingungen  $u^1(\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2) = 0$ ,  $0 \leq u^2(\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2) \leq 2\pi$  erfüllt. Die Matrix  $\mathbf{I}(X)$  lautet im neuen System

$$\mathbf{I}(X) = \left( \mathbf{x}_{u^1}(u^1, u^2) \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} + \mathbf{x}_{u^2}(u^1, u^2) \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^1}, \mathbf{x}_{u^1}(u^1, u^2) \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} + \mathbf{x}_{u^2}(u^1, u^2) \frac{\partial u^2}{\partial \bar{u}^2} \right).$$

Darin sind die Größen  $u^i$ ,  $\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^k}$ ,  $i, k = 1, 2$ , Funktionen von  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$ . Wir erhalten aus  $\mathbf{I}(X)$  wegen  $u^1 = u_0^1 = u^1(\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2) = 0$  und  $\mathbf{x}_{u^2}(0, u^2(\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2)) = \mathbf{o}$  für den Punkt  $O$  die Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{I}(O) &= \left( \mathbf{x}_{u^1}(0, u^2(\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2)) \left( \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \right)_0, \mathbf{x}_{u^1}(0, u^2(\bar{u}_0^1, \bar{u}_0^2)) \left( \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \right)_0 \right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos u^2 \left( \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \right)_0 & \cos u^2 \left( \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \right)_0 \\ \sin u^2 \left( \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \right)_0 & \sin u^2 \left( \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \right)_0 \\ a \left( \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^1} \right)_0 & a \left( \frac{\partial u^1}{\partial \bar{u}^2} \right)_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sie besitzt zwei zueinander proportionale Spaltenvektoren und hat den Rang 1, unabhängig davon, wie man das neue Koordinatensystem  $\bar{u}^1, \bar{u}^2$  wählt. Daher ist der Punkt  $O$  bezüglich jeder zulässigen Parameterdarstellung der Fläche singulär, und  $O$  ist ein singulärer Punkt der Fläche.

4.3: Die Ableitungsvektoren lauten  $\mathbf{x}_{u^1} = \mathbf{i} + \frac{2}{3}(u^1 - 1)\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{x}_{u^2} = \frac{1}{3}\mathbf{j}$ . Daraus folgt  $g_{11} = 1 + \frac{4}{9}(u^1 - 1)^2$ ,  $g_{12} = 0$ ,  $g_{22} = \frac{1}{9}$ . Um eine Böschungslinie zu erhalten, setzt man zunächst  $u^1 = u^1(t)$ ,  $u^2 = u^2(t)$ . Damit wird auf der Fläche eine beliebige Kurve definiert. Der Tangenten-

vektor  $\dot{\mathbf{x}}$  einer solchen Kurve lautet  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_u \dot{u} = \mathbf{x}_u \dot{u}^1 + \mathbf{x}_u \dot{u}^2$ . Setzt man für  $\mathbf{x}_u$ ,  $\dot{u}$  die ursprünglichen Ausdrücke ein, so erhält man  $\dot{\mathbf{x}} = \dot{u}^1 \mathbf{i} + \frac{1}{4} \dot{u}^2 \mathbf{j} + \frac{3}{8} (u^1 - 1) \dot{u}^2 \mathbf{k}$ . Soll die Kurve eine Böschungslinie bezüglich der  $x_1$ ,  $x_2$ -Ebene sein, so muß der Winkel zwischen  $\dot{\mathbf{x}}$  und der  $x_3$ -Achse konstant sein. Es gilt daher für alle  $t$

$$\cos(\dot{\mathbf{x}}, \mathbf{k}) = \frac{\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k}}{|\dot{\mathbf{x}}| |\mathbf{k}|} = \frac{2}{3} \frac{(u^1 - 1) \dot{u}^1}{\left[ \left( 1 + \frac{4}{9} (u^1 - 1)^2 (\dot{u}^1)^2 + \frac{1}{16} (\dot{u}^2)^2 \right)^{1/2} \right]} = K.$$

Nach kurzer Rechnung findet man die Differentialgleichungen

$$|\dot{u}^1| \sqrt{\frac{4}{9} (u^1 - 1)^2 (1 - K^2) - K^2} - |\dot{u}^2| \frac{|K|}{4} = 0$$

bzw. mit geeignetem gewähltem Vorzeichen des zweiten Summanden

$$\dot{u}^1 \sqrt{\frac{4}{9} (u^1 - 1)^2 (1 - K^2) - K^2} \pm \dot{u}^2 \frac{K}{4} = 0.$$

Für die Lösung  $u^1$  macht man den Ansatz  $\frac{4}{9} (u^1 - 1)^2 (1 - K^2) = K^2 \cosh^2 t$  bzw. wegen  $\cosh t \geq 0$  für alle  $t$

$$u^1 = \pm \frac{3|K|}{2\sqrt{1-K^2}} \cosh t + 1.$$

Dann folgt für  $t \geq 0$  wegen  $|\sinh t| = \sinh t$  nach Einsetzen in die Differentialgleichung

$$\dot{u}^2 = \pm \frac{4}{K} \dot{u}^1 \cdot |K| \cdot |\sinh t| = \pm \frac{6K}{\sqrt{1-K^2}} \sinh^2 t$$

und nach Integration

$$u^2 = \pm \frac{3K}{\sqrt{1-K^2}} (\cosh t \cdot \sinh t - t) + A.$$

Es sei zunächst  $t \geq 0$ . Nimmt man an, daß die durch  $u^1$  und  $u^2$  bestimmte Flächenkurve für  $t = t_1$  durch  $P(1, 0, 0)$  und für  $t = t_2$  durch  $Q(2 - \cosh 2, \frac{1}{2} \sinh 2 \cdot \cosh 2 - 1, \frac{1}{3} (\cosh 2)^2 - \frac{1}{3})$  geht, so ergibt sich für  $P$

$$x_1 = 1 + u^1(t_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad u^1(t_1) = 0;$$

$$x_2 = \frac{1}{3} u^2(t_1) = 0 \quad \Rightarrow \quad u^2(t_1) = 0;$$

$$x_3 = \frac{1}{3} ([u^1(t_1)]^2 - 2u^1(t_1)) = 0$$

und für  $Q$

$$x_1 = 1 + u^1(t_2) = 2 - \cosh 2 \quad \Rightarrow \quad u^1(t_2) = 1 - \cosh 2;$$

$$x_2 = \frac{1}{3} u^2(t_2) = \frac{1}{3} \sinh 2 \cosh 2 - 1 \quad \Rightarrow \quad u^2(t_2) = 2 \sinh 2 \cdot \cosh 2 - 4;$$

$$x_3 = \frac{1}{3} ([u^1(t_2)]^2 - 2u^1(t_2)) = \frac{1}{3} \sinh^2 2.$$

Damit haben wir vier Gleichungen für die vier Unbekannten  $t_1, t_2, K$  und  $A$

$$\pm \frac{3|K|}{2\sqrt{1-K^2}} \cosh t_1 + 1 = 0,$$

$$\pm \frac{3|K|}{2\sqrt{1-K^2}} \cosh t_2 + 1 = 1 - \cosh 2,$$

$$\pm \frac{3K}{\sqrt{1-K^2}} (\cosh t_1 \sinh t_1 - t_1) - A = 0,$$

$$\pm \frac{3K}{\sqrt{1-K^2}} (\cosh t_2 \sinh t_2 - t_2) + A = 2 \sinh 2 \cosh 2 - 4.$$

In den ersten beiden Gleichungen muß das negative Vorzeichen gewählt werden, da sie sich wegen  $\cosh t \geq 0$  für alle  $t$  sonst nicht erfüllen lassen. Die Vorzeichen der beiden letzten Gleichungen stimmen überein, sind aber noch beliebig. Das System wird durch Probieren gelöst, wozu  $t_1 = 0$

angenommen wird. Dann folgt aus der ersten und dritten Gleichung

$$-\frac{3|K|}{2\sqrt{1-K^2}} = -1 \quad \text{bzw.} \quad K = \pm \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad A = 0,$$

und damit aus der zweiten Gleichung

$$-\cosh t_2 = -\cosh 2 \quad \text{bzw.} \quad t_2 = 2 \quad (\text{wegen } t \geq 0 \text{ scheidet } t_2 = -2 \text{ aus}).$$

Die letzte Gleichung legt das Vorzeichen von  $K$  fest. Es ist  $|\dot{\mathbf{x}}||\mathbf{k}| > 0$ . Für  $t \geq 0$  ist auch  $\dot{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{k} \sim (u^1 - 1)\dot{u}^1 = (-\cosh t)(-\sinh t) \geq 0$ , womit  $K$  ebenfalls positiv gewählt werden muß, also haben in diesem Falle die dritte und vierte Gleichung positives Vorzeichen. Man findet schließlich

$$\begin{aligned} u^1 &= 1 - \cosh t, \\ u^2 &= 2(\cosh t \sinh t - t). \end{aligned}$$

Wenn  $t \leq 0$  ist, so ist auch  $K < 0$ , und in den letzten Gleichungen ist das negative Vorzeichen zu wählen. Das Ergebnis ändert sich dadurch nicht.

Die Kurve hat im Punkt  $P$  eine Spitze, deren Tangente parallel zur  $x_1x_3$ -Ebene ist. Die Kurve ist keine geodätische Linie, weil die Flächennormale im allgemeinen in keinem Punkt der Kurve in der Schmiegeebene liegt. Daher verstreckt sich diese Böschungslinie bei Abwicklung der Zylinderfläche in eine Ebene nicht in eine Gerade, wie dies bei der gewöhnlichen Schraubenlinie der Fall ist. Integration ergibt die Bogenlänge des Kurvenstücks von  $P$  bis  $Q$ :

$$s(P, Q) = \int_0^2 \sqrt{\left(1 + \frac{4}{9} \cosh^2 t\right) \sinh^2 t + \sinh^4 t} \, dt = \int_0^2 \frac{\sqrt{13}}{3} \cosh t \sinh t \, dt = \frac{\sqrt{13}}{6} \sinh^2 2.$$

**4.4:**  $P(u^1, 0, f(u^1))$  sei ein Punkt der gegebenen Kurve, der bei der Rotation dieser Kurve um die  $x_3$ -Achse einen Kreis mit dem Mittelpunkt  $M(0, 0, f(u^1))$  und dem Radius  $u^1$  beschreibt.  $X$  sei ein Punkt dieses Kreises, der aus  $P$  durch Drehung um den Winkel  $u^2 = \angle PMX$  hervorgeht. Dann gilt  $x_1 = u^1 \cos u^2$ ,  $x_2 = u^1 \sin u^2$ ,  $x_3 = f(u^1)$ , wobei  $x_1, x_2, x_3$  die Koordinaten von  $X$  sind. Da der Punkt  $P$  beliebig auf der gegebenen Kurve wählbar ist, was in der Veränderlichkeit von  $u^1$  zum Ausdruck kommt, und außerdem auch der Winkel  $u^2$  in den Grenzen 0 und  $2\pi$  variiert werden kann, ist  $X$  ein beliebiger Punkt der entstehenden Rotationsfläche. Die gefundenen Gleichungen sind daher eine Parameterdarstellung dieser Rotationsfläche. Es gilt dabei im allgemeinen  $0 \leq u^1 < +\infty$ ,  $0 \leq u^2 \leq 2\pi$ . Die  $u^1$ -Linien ( $u^2 = \text{const}$ ) sind die Meridianlinien. Das sind die Schnittkurven der durch die  $x_3$ -Achse gehenden Ebenen mit der Fläche. Die Meridianlinien sind alle zur Kurve  $x_3 = f(x_1)$  kongruent, weil sie durch Drehung aus ihr hervorgehen. Die  $u^2$ -Linien ( $u^1 = \text{const}$ ) sind Kreise mit dem Radius  $u^1$ , deren Ebenen zur  $x_1, x_2$ -Ebene parallel sind und deren Mittelpunkte auf der  $x_3$ -Achse liegen. Die Ableitungsvektoren lauten:  $\mathbf{x}_{u^1} = \cos u^2 \mathbf{i} + \sin u^2 \mathbf{j} + f'(u^1) \mathbf{k}$ ,  $\mathbf{x}_{u^2} = -u^1 \sin u^2 \mathbf{i} + u^1 \cos u^2 \mathbf{j}$ . Hieraus folgt  $g_{11} = 1 + (f'(u^1))^2$ ,  $g_{12} = 0$ ,  $g_{22} = (u^1)^2$ . Da  $g_{12} = 0$  ist, bilden die  $u^1$ - und  $u^2$ -Linien ein orthogonales Netz.

**4.5:** Der Ursprung des orthogonalen  $x_1, x_2, x_3$ -Koordinatensystems werde in den Mittelpunkt der kugelförmigen Dachfläche gelegt. Dann gilt für die Dachfläche, da es sich um eine Halbkugel handelt, die Parameterdarstellung  $x_1 = R \sin u^2 \cos u^1$ ,  $x_2 = R \sin u^2 \sin u^1$ ,  $x_3 = R \cos u^2$  ( $B: 0 \leq u^2 \leq \pi/2$ ,  $0 \leq u^1 \leq 2\pi$ ). Für das zylindrische Rohr ergibt sich die folgende Gleichung  $(x_1 - R/2)^2 + (x_2)^2 = R^2/4$  bzw.  $(x_1)^2 + (x_2)^2 - Rx_1 = 0$ . Setzt man die Parameterdarstellung für die Halbkugel in die Gleichung für die Zylinderfläche ein, so erhält man

$$R^2 \sin u^2 (\sin u^2 - \cos u^1) = 0.$$

Hieraus folgt  $\sin u^2 = \cos u^1$  bzw.  $u^2 = \frac{1}{2}\pi - u^1$ . Es werde ein Viertel der Halbkugelfläche nach Abrechnung des von dem zylindrischen Rohr durchsetzten Teils mit  $F_1$  bezeichnet. Dann gilt mit

$a = b = c = R$  auf Grund von Aufgabe 4.1a), wenn man noch die Vertauschung von  $u^1$  mit  $u^2$  beachtet,

$$g_{22} = R^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{11} = R^2 \sin^2 u^2 \quad \text{und}$$

$$\sqrt{g} = R^2 |\sin u^2| = R^2 \sin u^2 \quad \text{für } 0 \leq u^2 \leq \frac{\pi}{2}.$$

Es ist

$$\begin{aligned} F_1 &= \int_B \sqrt{g} \, du^1 \, du^2 = R^2 \int_{u^1=0}^{\pi/2} \int_{u^2=\pi/2-u^1}^{\pi/2} \sin u^2 \, du^2 \, du^1 \\ &= R^2 \int_0^{\pi/2} \cos(\pi/2 - u^1) \, du^1 = R^2. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für die insgesamt verbleibende Fläche

$$F = \pi R^2 + 2R^2 \approx 5,14159 R^2.$$

4.6: Aus Aufgabe 4.1a) ergibt sich  $\sqrt{g}$  und für den Flächeninhalt  $F$  der Oberfläche des Ellipsoids findet man

$$F = \int_{u^2=0}^{2\pi} \int_{u^1=0}^{\pi} \sqrt{a^2 b^2 \cos^2 u^1 \sin^2 u^1 + c^2 \sin^4 u^1 (a^2 \sin^2 u^2 + b^2 \cos^2 u^2)} \, du^1 \, du^2.$$

Mit

$$a^2 \sin^2 u^2 + b^2 \cos^2 u^2 = A^2, \quad \cos u^1 = z, \quad -\sin u^1 \, du^1 = dz$$

folgt

$$I = - \int du^2 \int \sqrt{a^2 b^2 z^2 + c^2 (1 - z^2) A^2} \, dz,$$

wobei die Integration nach  $z$  unbestimmt ausgeführt wird. Es ist

$$\begin{aligned} a^2 b^2 - c^2 A^2 &= a^2 b^2 - c^2 a^2 \sin^2 u^2 - c^2 b^2 \cos^2 u^2 \geq a^2 b^2 - c^2 a^2 \sin^2 u^2 - c^2 a^2 \cos^2 u^2 \\ &= a^2 b^2 - a^2 c^2 = a^2 (b^2 - c^2) > 0. \end{aligned}$$

Daher kann man

$$\frac{a^2 b^2 - c^2 A^2}{c^2 A^2} = k^2$$

setzen. Dann erhält man

$$\begin{aligned} I &= - \int du^2 \int cA \sqrt{1 + k^2 z^2} \, dz \\ &= -c \int A \frac{1}{2} du^2 \left( z \sqrt{1 + k^2 z^2} + \frac{1}{k} \ln(kz + \sqrt{1 + k^2 z^2}) \right). \end{aligned}$$

Setzt man für  $A$ ,  $z$  die ursprünglichen Ausdrücke ein, so folgt

$$\begin{aligned} F &= - \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} \int \sqrt{a^2 \sin^2 u^2 + b^2 \cos^2 u^2} [\cos u^1 \sqrt{1 + k^2 \cos^2 u^1} \\ &\quad + \frac{1}{k} \ln[k \cos u^1 + \sqrt{1 + k^2 \cos^2 u^1}]]_0^{\pi} du^2. \end{aligned}$$

Nach Einsetzen der Grenzen und Zusammenfassen ergibt sich daraus

$$F = -\frac{c}{2} \int_0^{2\pi} \left[ -\frac{2ab}{c} + \frac{c(a^2 \sin^2 u^2 + b^2 \cos^2 u^2)}{\sqrt{a^2 b^2 - c^2(a^2 \sin^2 u^2 + b^2 \cos^2 u^2)}} \ln \left( \frac{ab - \sqrt{a^2 b^2 - c^2 A^2}}{ab + \sqrt{a^2 b^2 - c^2 A^2}} \right) \right] du^2.$$

Erweitert man den Ausdruck unter dem Logarithmus mit

$$ab - \sqrt{a^2 b^2 - c^2 A^2}$$

und kürzt die Faktoren  $c$  und  $2$ , so erhält man

$$F = 2ab\pi - c^2 I_1.$$

Dabei gilt für  $I_1$ , wenn man statt von  $0$  bis  $2\pi$  von  $0$  bis  $\frac{\pi}{2}$  integriert und dafür den zusätzlichen Faktor  $4$  vor das Integral schreibt

$$I_1 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2 \sin^2 u^2 + b^2 \cos^2 u^2}{\sqrt{a^2 b^2 - c^2(a^2 \sin^2 u^2 + b^2 \cos^2 u^2)}} \ln \left[ \frac{ab - \sqrt{a^2 b^2 - c^2(a^2 \sin^2 u^2 + b^2 \cos^2 u^2)}}{c \sqrt{a^2 \sin^2 u^2 + b^2 \cos^2 u^2}} \right] du^2.$$

Da dieses Integral nicht exakt auswertbar ist, soll es genähert mit Hilfe der Keplerschen Faßregel berechnet werden:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} \left( f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right).$$

Man erhält mit

$$a = 0, \quad b = \frac{\pi}{2}$$

$$I_1 \approx \frac{\pi}{3} \left[ \frac{b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \ln \left( \frac{a - \sqrt{a^2 - c^2}}{c} \right) + \frac{2(a^2 + b^2)\sqrt{2}}{[2a^2 b^2 - c^2(a^2 + b^2)]^{1/2}} \times \right. \\ \left. \ln \left( \frac{ab\sqrt{2} - \sqrt{2a^2 b^2 - c^2(a^2 + b^2)}}{c\sqrt{a^2 + b^2}} \right) + \frac{a}{\sqrt{b^2 - c^2}} \ln \left( \frac{b - \sqrt{b^2 - c^2}}{c} \right) \right].$$

Damit ergibt sich als Näherungsformel für den Inhalt  $F$  der Oberfläche eines dreiachsigen Ellipsoids mit den Halbachsen  $a, b, c$

$$F \approx 2ab\pi - c^2 \frac{\pi}{3} \left[ \frac{b}{\sqrt{a^2 - c^2}} \ln \left( \frac{a - \sqrt{a^2 - c^2}}{c} \right) + \frac{a}{\sqrt{b^2 - c^2}} \ln \left( \frac{b - \sqrt{b^2 - c^2}}{c} \right) \right. \\ \left. + \frac{4(a^2 + b^2)}{\sqrt{4a^2 b^2 - 2c^2(a^2 + b^2)}} \ln \left( \frac{ab\sqrt{2} - \sqrt{2a^2 b^2 - c^2(a^2 + b^2)}}{c\sqrt{a^2 + b^2}} \right) \right].$$

Im Fall  $b = a$  kann man das Integral  $I_1$  exakt auswerten, und man findet für die Oberfläche  $F$

$$F = 2a^2\pi - (2c^2\pi a/\sqrt{a^2 - c^2}) \ln [(a - \sqrt{a^2 - c^2})/c].$$

Denselben Wert erhält man auch aus der Näherungsformel für das dreiachsige Ellipsoid, wenn  $b = a$  gesetzt wird.

**4.7:** Die Wand des Gefäßes ist ein gerader Kreiszylinder und daher durch die Parameterdarstellung  $x_1 = r \cos u^1$ ,  $x_2 = r \sin u^1$ ,  $x_3 = hu^2$ ,  $0 \leq u^1 \leq 2\pi$ ,  $0 \leq u^2 \leq 1$  gegeben. Darin bedeutet



$r$  den Radius des Grundkreises des Zylinders. Die Lichtstrahlen mögen parallel zum Vektor  $\mathbf{I} = i \cos \alpha - k \sin \alpha$  einfallen. Die Höhe  $h$  des Gefäßes und der Winkel  $\alpha$  sollen so gewählt werden, daß der größte Teil des Gefäßbodens im Licht liegt. Das ist sicherlich dann der Fall, wenn  $h \cot \alpha \ll r$  ist.  $X$  sei ein beliebiger Punkt der Gefäßwand, der von einem Lichtstrahl beleuchtet wird. Der im Punkt  $X$  reflektierte Lichtstrahl ergibt sich dann nach dem Reflexionsgesetz durch Spiegelung des in  $X$  einfallenden Lichtstrahls an der Flächennormale  $f$  in der von dieser und dem einfallenden Strahl bestimmten Ebene. Man findet mit  $g = r^2 h^2$

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{x}_u^1 \times \mathbf{x}_v^1}{\sqrt{g}} = \frac{1}{rh} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -r \sin u^1 & r \cos u^1 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{vmatrix} = \cos u^1 \mathbf{i} + \sin u^1 \mathbf{j}.$$

Bezeichnet man den Einheitsvektor des reflektierten Lichtstrahls mit  $\mathbf{I}^*$ , so folgt  $\mathbf{I}^* = \mathbf{I} - 2(\mathbf{f} \cdot \mathbf{I}) \mathbf{f}$ . Setzt man in diese Formel die Ausdrücke für  $\mathbf{I}$  und  $\mathbf{f}$  ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{I}^* &= \cos \alpha (1 - 2 \cos^2 u^1) \mathbf{i} - 2 \cos \alpha \cos u^1 \sin u^1 \mathbf{j} - \sin \alpha \mathbf{k} \\ &= -\cos \alpha \cos 2u^1 \mathbf{i} - \cos \alpha \sin 2u^1 \mathbf{j} - \sin \alpha \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Die reflektierten Lichtstrahlen der  $u^2$ -Linie  $u^1 = \text{const}$  liegen in der Ebene mit der Gleichung

$$a_1(y_1 - r \cos u^1) + a_2(y_2 - r \sin u^1) = 0,$$

wobei  $y_1, y_2$  die laufenden Koordinaten eines beliebigen Punktes dieser Ebene bedeuten. Da alle Lichtstrahlen, die die Gefäßwand in den Punkten einer  $u^2$ -Linie treffen, zueinander parallel sind und dies auch für die Flächennormalenvektoren dieser Punkte zutrifft, sind auch die zugehörigen reflektierten Lichtstrahlen zueinander parallel. Daher liegen diese reflektierten Lichtstrahlen alle in einer Ebene, die die  $u^2$ -Linie enthält und daher zur  $x_1, x_2$ -Ebene senkrecht steht. Die Gleichung dieser Ebene hat daher die angegebene Form. Um die noch unbekannten Größen  $a_1$  und  $a_2$  zu bestimmen, setzt man die Koordinaten eines beliebigen Punktes eines reflektierten Lichtstrahls für  $y_1, y_2$  ein. Die vektorielle Parameterdarstellung eines solchen reflektierten Lichtstrahls lautet  $\mathbf{y} = \mathbf{x}(u^1, u^2) + t \mathbf{I}^*$ . Damit ergibt sich

$$y_1 = r \cos u^1 + t(-\cos \alpha \cos 2u^1),$$

$$y_2 = r \sin u^1 + t(-\cos \alpha \sin 2u^1),$$

$$y_3 = hu^2 + t(-\sin \alpha).$$

Dies eingesetzt in die obige Ebenengleichung führt zu  $a_1(-t \cos \alpha \cos 2u^1) + a_2(-t \cos \alpha \sin 2u^1) = 0$ . Nach Division durch  $-t \cos \alpha$  folgt daraus  $a_1/a_2 = -\sin 2u^1/\cos 2u^1$ . Die Gleichung der Ebene der reflektierten Lichtstrahlen aller Punkte einer  $u^2$ -Linie lautet demnach

$$y_1 \sin 2u^1 - y_2 \cos 2u^1 = r(\sin 2u^1 \cos u^1 - \cos 2u^1 \sin u^1) = r \sin u^1.$$

Die Gleichung der Schnittgeraden dieser Ebene mit der  $x_1, x_2$ -Ebene lautet ebenso. Die Hüllkurve dieser Geradenschar erhält man durch Differentiation nach dem Parameter  $u^1$ . Da jeder Punkt dieser Kurve von einem Lichtstrahl direkt und außerdem noch von zwei infinitesimal benachbarten reflektierten Lichtstrahlen beleuchtet wird, erscheint diese Kurve als eine hell beleuchtete Linie auf dem Gefäßboden. Durch Differentiation erhält man mit der ursprünglichen Gleichung das Gleichungssystem:

$$y_1 \sin 2u^1 - y_2 \cos 2u^1 = r \sin u^1,$$

$$2y_1 \cos 2u^1 + 2y_2 \sin 2u^1 = r \cos u^1.$$

Die Lösung des Systems ergibt

$$y_1 = \frac{r}{2} (2 \sin 2u^1 \sin u^1 + \cos 2u^1 \cos u^1),$$

$$y_2 = \frac{r}{2} (-2 \cos 2u^1 \sin u^1 + \sin 2u^1 \cos u^1).$$

Eine kleine Umformung ergibt

$$y_1 = \frac{r}{2} (2 \sin^2 u^1 + 1) \cos u^1,$$

$$y_2 = \frac{r}{2} (2 \sin^3 u^1) = r(\sin^3 u^1).$$

Dies ist eine Parameterdarstellung der gesuchten Hüllkurve. Mit  $\sin u^1 = (y_2/r)^{1/3}$  und durch Einsetzen in die Gleichung von  $y_1$  erhält man  $4y_1^2 = r^2(1 + 3(y_2/r)^{2/3} - 4(y_2/r)^2)$  und schließlich  $(4(y_1^2 + y_2^2) - r^2)^3 - 27r^4(y_2^2)^2 = 0$ . Bezeichnet man den auf der linken Seite der Gleichung stehenden Ausdruck mit  $F$ , so findet man

$$F_{y_1} = 24(4(y_1^2 + y_2^2) - r^2)^2 y_1,$$

$$F_{y_2} = 24(4(y_1^2 + y_2^2) - r^2)^2 y_2 - 54r^4 y_2,$$

$$F_{y_1 y_1} = 384(4(y_1^2 + y_2^2) - r^2)(y_1)^2 + 24(4(y_1^2 + y_2^2) - r^2)^2,$$

$$F_{y_1 y_2} = 384(4(y_1^2 + y_2^2) - r^2) y_1 y_2,$$

$$F_{y_2 y_2} = 384(4(y_1^2 + y_2^2) - r^2)(y_2)^2 + 24(4(y_1^2 + y_2^2) - r^2)^2 - 54r^4.$$

Der Punkt  $X_0$  mit den Koordinaten  $y_1 = r/2, y_2 = 0$  ist ein singulärer Punkt, denn es ist

$$F(r/2, 0) = F^0 = 0, \quad F_{y_1}^0 = 0, \quad F_{y_2}^0 = 0, \quad F_{y_1 y_1}^0 = 0, \quad F_{y_1 y_2}^0 = 0,$$

$$F_{y_2 y_2}^0 = -54r^4, \quad \Delta^0 = (F_{y_1 y_2}^0)^2 - F_{y_1 y_1}^0 F_{y_2 y_2}^0 = 0.$$

In  $X_0$  hat die Kurve eine Spitze.  $X_0$  hat den Parameterwert  $u^1 = 0$ , für den  $y_1(u^1)$  ein Minimum hat. In der Umgebung von  $X_0$  hat die Kurve keine Punkte mit kleinerer Abszisse als  $X_0$ . Daher hat sie in  $X_0$  eine Spitze. Außerdem berührt die Kurve den Kreis  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  in den Punkten  $X_1(0, r)$  und  $X_2(0, -r)$ . Die Kurve ist symmetrisch zur  $x_1$ -Achse, wobei die  $y_1$ -Achse mit der  $x_1$ -Achse und die  $y_2$ -Achse mit der  $x_2$ -Achse zu identifizieren ist. Die Kurve heißt auch sphärische Katakaustik.

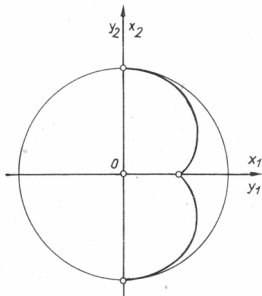


Bild L.4.7. Sphärische Katakaustik

4.8: Nach dem Satz von Meusnier und dem in (4.84) erhaltenen Ergebnis folgt aus Bild L.4.8

$$\varrho = r \sin \varepsilon, \quad \varrho_0 = r \tan \varepsilon = rc > 0.$$

Aus  $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + b$  findet man nach (3.26)  $\bar{\varrho}(x) = a \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right)$ .  $\bar{\varrho}(x)$  ist der mit Vorzeichen behaftete Krümmungsradius der in die  $x, y$ -Ebene abgewinkelten Umformlinie. Es ist  $\bar{\varrho}(0) = a < 0$  und  $\bar{\varrho}'(0) = -\varrho_0$ .

Im Punkt  $A$  ( $x = 0$ ) ergibt sich  $\varrho_0 = -a$  und damit  $a = -rc$ . Für  $x = 0$  ist  $y = h$ . Demnach wird  $b = h - a = h + rc$  und  $y(\varphi) = rc \left(1 - \cosh\left(\frac{\varphi}{c}\right)\right) + h$ . Die Parameterdarstellung lautet nun

$$x_1(\varphi) = r \cos \varphi, \quad x_2(\varphi) = r \sin \varphi, \quad x_3(\varphi) = rc \left(1 - \cosh\left(\frac{\varphi}{c}\right)\right) + h.$$

Der Hauptnormalenvektor  $\mathbf{n}$  der Umformlinie hat die Gestalt

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\cosh \frac{\varphi}{c} \sqrt{1+c^2}} \left( -c \cos \varphi \cosh \frac{\varphi}{c} + \sin \varphi \sinh \frac{\varphi}{c}, -c \sin \varphi \cosh \frac{\varphi}{c} - \cos \varphi \sinh \frac{\varphi}{c}, -1 \right).$$

Der Normalenvektor  $\mathbf{f}$  der Tangentialebene des Zylinders ergibt sich zu  $\mathbf{f} = (-\cos \varphi, -\sin \varphi)$ . Hieraus folgt für jeden Wert von  $\varphi$  wie behauptet

$$\sin \varepsilon = \mathbf{n} \cdot \mathbf{f} = \frac{c}{\sqrt{1+c^2}}, \quad \tan \varepsilon = c.$$

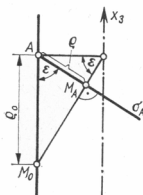
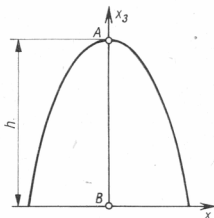


Bild L.4.8



## Literatur

- [1] *Brehmer, S.*: Differentialgeometrie, 1. u. 2. Teil Lehrbriefe für das Fernstudium der Lehrer, Hauptabteilung Fernstudium der Pädagogischen Hochschule Potsdam 1966.
- [2] *Fichtenholz, G. M.*: Differential- und Integralrechnung I. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1970.
- [3] *Haack, W.*: Elementare Differentialgeometrie. Basel und Stuttgart: Birkhäuser Verlag 1955.
- [4] *Hieke, M.*: Vektoralgebra. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1963.
- [5] *Jegorow, F.*: Arbeiten über Differentialgeometrie. Moskau: Verlag Nauka 1970.
- [6] *Kreyszig, E.*: Differentialgeometrie, 2. Aufl. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1968.
- [7] *Kruppa, E.*: Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Wien: Springer-Verlag 1957.
- [8] *Lagally, M.*: Vorlesungen über Vektorrechnung. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G. 1964.
- [9] *v. Mangoldt-Knopp*: Einführung in die Höhere Mathematik. Band 1–4. Leipzig: S. Hirzel Verlag 1970/73.
- [10] *Norden, A. P.*: Differentialgeometrie, Teil I u. II. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1956.
- [11] *Norden, A. P.*: Elementare Einführung in die Lobatschewskische Geometrie. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1958.
- [12] *Rothe, R.*: Höhere Mathematik, Teil I. Leipzig: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1962.
- [13] *Rühs, F.; Borsdorf, W.*: Differentialgeometrie in vektorieller Behandlung, 2. Lehrbrief: Differentialgeometrie der Flächen. Bergakademie Freiberg, Fernstudium, 1962.
- [14] *Schmid, W.; Borsdorf, W.*: Differentialgeometrie in vektorieller Behandlung, 1. Lehrbrief: Raumkurven, Bergakademie Freiberg, Fernstudium, 1958.
- [15] *Schmid, W.; Borsdorf, W.*: Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen, 1. und 2. Band. Bergakademie Freiberg, Fernstudium, 1959.
- [16] *Harbarth, K.*: Grundlagen der Differentialgeometrie, Lehrbriefe für Mathematik. Hergestellt von dem Kollektiv H. Alkier, H. Ebmeyer, O. Fuchs, W. Hess, W. Klobe, W. Langer, H. Wenzel, II. Lehrbrief, III. Ausgabe. Berlin: VEB Verlag Technik 1967.
- [17] *Autorenkollektiv*: Getriebetechnik. Herausgegeben von Prof. Dr. J. Völmer. Berlin: VEB Verlag Technik 1974.
- [18] *Beyer, R.*: Technische Kinematik. Leipzig: J. A. Barth 1931.
- [19] *Dietz, G.; Günther, R. H.*: Zur Problematik der Gestaltung von Formschultern für Schlauchbeutelform-, -füll und -verschleißmaschinen. Wiss. Zeitschrift der TU Dresden 23 (1974), Heft 5.
- [20] *Eisenreich, G.*: Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung. Leipzig: BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft 1970.
- [21] *Klotzke, B.*: Einführung in die Differentialgeometrie I, II. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften 1981.

## Namen- und Sachregister

Abbildung 106

–, eineindeutige 90, 107

–, flächentreue 107

–, isometrische 107

–, konforme 107

–, längentreue 107

–, winkeltreue 107

–, zulässige 107

Abbildung von Bonne 116–118

Ableitungsgleichungen, Frenetsche 28

Ableitungsvektoren einer Fläche 91, 93

– einer Raumkurve 28

Abweitung 118

abweitungstreu 118

abwickelbar 108

Abwicklung 108

archimedische Spirale 61, 128

Astroide 68, 69

asymptotischer Punkt 129, 130

Asymptote, geradlinige 129

Asymptotenlinien 97

Asymptotenrichtungen 96

Bahngeschwindigkeit 31

Basis 8

Basisvektoren 8

–, kovariante 93

begleitendes Dreibein 20, 22

Bernoullische Lemniskate 59–61

Berührung  $n$ -te Ordnung 47

Beschleunigungsvektor 24, 26

Betrag eines Vektors 6, 9, 10

biegungsvariant 108

Binormalenvektor 22

Böschungslinie 35, 123

Bogenelement einer ebenen Kurve 38

– einer Flächenkurve 80

– einer Raumkurve 20

Bogenlänge einer ebenen Kurve 38, 45

– einer Flächenkurve 83

– einer Raumkurve 20

Bonne, Abbildung von 116–118

Bolyai 94

Breitenkreise 82, 103

Christoffelsymbole erster Art 111

– zweiter Art 111

Darbouxscher Vektor 30

distributives Gesetz der skalaren Multiplikation 9

– der vektoriellen Multiplikation 10

Diskriminante eines singulären Punktes einer  
ebenen Kurve 55

Diskriminantenkurve 68

Doppelpunkt 55

Drehfläche 103

Drehung eines starren Körpers 31

Dupinsche Indikatrix 104, 105

Durchlaufssinn 6

Ebene Kurve 38

–, Bogenelement einer 38, 45, 57

–, Bogenlänge einer 38, 45

–, Flachpunkt einer 41

–, Krümmung einer 39, 45, 46, 57

–, Krümmung einer implizit gegebenen 54

–, Krümmungskreis einer 42

–, Krümmungsradius einer 39, 42, 45

–, Krümmungsmittelpunkt einer 41

–, Tangentenvektor einer 38

–, Wendepunkt einer 40

eineindeutige Abbildung 90, 107

einfach zusammenhängend 75, 76

Eingriffslinie 72

Eingriffspunkt 72

Einheitsvektor 8

Einheitsmatrix 92

Einsiedlerpunkt 55, 128

Ellipsoid, Parameterdarstellung eines 89

–, Oberfläche eines 139

elliptisch gekrümmt 97

elliptischer Punkt einer Fläche 97, 105

elliptischer Nabelpunkt 100

Entwicklungssatz 12

Epitrochoide 126

–, verschlungene 126

–, gestreckte 126

–, gespitzte 126

Epizykloide 126

erste Grundform 80

Erzeugende einer Regelfläche 31, 108

Erzeugende einer Torse 109

Euler, Satz von 103

Evolute 63, 65

Evolvente 64, 65

Evolventenverzahnung 65, 73

explizite Gleichung einer ebenen Kurve 43

Flachpunkt 41

Fläche, gekrümmte 75, 77

–, abwickelbare 108

–, Gleichung einer 76

Fläche, Parameterdarstellung einer 76, 77  
 –, Tangentialebene einer 79, 84  
 Flächenelement 88  
 –, ebenes in Polarkoordinaten 60, 61, 62, 130  
 Flächenkurve 78  
 –, geodätische Krümmung einer 110  
 –, Tangentenvektor einer 78  
 Flächennormalenvektor 84  
 Flächenstück, gekrümmtes 77  
 –, Parameterdarstellung eines 77  
 flächentreue Abbildung 107  
 Flächentheorie 75  
 Flexion 25  
 Formschulter 112, 141  
 freier Index 91  
 Frenetsche Formeln 28  
 Fundamentaltensor 80  
 Funktionaldeterminante 80

Gangebene 70  
 Ganghöhe 32  
 –, reduzierte 32  
 Gangpolbahn 71  
 Gauß 94  
 Gaußsche Zahlenebene 113  
 Gaußsches Koordinatensystem 79, 86  
 Gaußsches Krümmungsmaß 103  
 Gegenprofil zu einer Zahnflanke 72  
 gekrümmte Fläche 77  
 gekrümmtes Flächenstück 77  
 gemischtes Produkt 11  
 geodätische Krümmung 110, 111  
 geodätische Linie 34, 112  
 geographische Breite 81  
 geographische Länge 81  
 Gerade in Polarkoordinaten 62, 130  
 Geschwindigkeitsvektor 20, 26  
 Gleichung einer Fläche 75  
 Grundform, erste 80  
 –, zweite 94, 96  
 Grundgesetz der Verzahnung 72

Hauptkrümmungen 102  
 Hauptkrümmungsrichtungen 100  
 Hauptnormalenvektor  
 –, einer ebenen Kurve 41, 42  
 –, einer Raumkurve 21  
 Hodograph 17  
 l'Hospitalische Regel 54  
 Hüllfläche 31  
 Hüllkurve 64, 66  
 hyperbolisch gekrümmt 97  
 hyperbolischer Punkt einer Fläche 97, 105

hyperbolische Spirale 61, 129  
 Hypotrochoide 126  
 –, gestreckt 126  
 –, verschlungene 126  
 –, gespitzte 126  
 Hypozykloide 126

implizite Gleichung einer ebenen Kurve 53  
 Index, freier 91  
 Indikatrix, Dupinsche 104, 105  
 infinitesimal benachbart 25, 47  
 infinitesimales Flächenstück 87  
 Inhalt von Flächenstücken 87, 88, 89, 138  
 Inversor von Peaucellier 62, 131, 132  
 isometrische Abbildung 107

Kanonische Entwicklung 35, 36  
 Kanonische Gleichungen 35, 36  
 Kardioiden 62  
 Kegelfläche 108  
 Kettenlinie 51, 112, 123, 141  
 Klasse zulässiger Koordinatentransformationen 90  
 – zulässiger Parameterdarstellungen 16, 76  
 Komponenten, skalare eines Vektors 6, 28  
 – eines Tensors 94  
 kommutatives Gesetz 9  
 kontragrediente Matrix 93  
 kontravariant 93, 94  
 kontravarianter Tensor 94  
 kontravariante Koordinaten eines Vektors 93  
 konforme Abbildung 107  
 Koordinaten eines Vektors 6  
 Koordinaten, Gaußsche 79  
 Koordinatenlinien 78, 79  
 Koordinatentransformationen 89, 90  
 kovariant 80, 93  
 kovarianter Tensor 93  
 Kreisevolvente 65, 132  
 Kreiszyylinder, gerader 82  
 Kroneckersches Symbol 92  
 Krümmung  
 – einer ebenen Kurve 38, 39, 45, 46, 54  
 – einer Raumkurve 25  
 –, geodätische 110, 111  
 Krümmungslinien 101, 102  
 – einer Rotationsfläche 103  
 Krümmungsmaß, Gaußsches 103  
 Krümmung, mittlere 103  
 Krümmungsmittelpunkt  
 – einer ebenen Kurve 41, 46  
 – einer Flächenkurve 99  
 – einer Raumkurve 25

- Krümmungsradius einer ebenen Kurve 39, 42, 46
  - einer Flächenkurve 99, 105
  - einer Raumkurve 25
- kubische Parabel 36
- Kugel 80, 81
- Kurve (s. a. ebene Kurve) 17, 38
- Kurvennetz 79
- krummlinige Koordinaten 79
- Kurvennormale 24, 43
- Kurventangente 17, 43
- Kurvengleichung (ebene Kurve) 43
  - , explizit 43
  - , implizit 43
- Lancet, Satz von 32
- längentreue Abbildung 107
- Längenverzerrung 115, 118
- Leitlinie einer Regelfläche 108
- Lemniskate, Bernoullische 59, 60, 61
- linear abhängig 8
- linear unabhängig 8
- Linksschraubung 103
- Lobatschewski 94
- Lobatschewskische Geometrie 94
- logarithmische Spirale 61, 129
- Maßtensor, kovarianter 80
- Matrix 91
  - , inverse 92
  - , kontragrediente 93
  - , transponierte 92
- Meridian 82
- Meridiankurve 103
- Metrik 94
- metrische Grundform 80
- Meusnier, Satz von 98, 99
- Momentanzentrum 70
- mittlere Krümmung 103
- Nabelpunkt, elliptischer 100
  - , parabolischer 97, 100
- Neilsche Parabel 36, 127
- nichteuclidische Geometrie 94
- Nordpol 81
- Normalbeschleunigung 26
- Normalebene 24
- Normale einer ebenen Kurve 43, 53, 54
  - einer Raumkurve 24
- Normalenabschnitt 44
- Normalkrümmung 99
- Normalschnittebene 95
- normierter Vektor 8
- Nullvektor 6
- Oberfläche eines Ellipsoides 89, 138–140
  - orthogonale Basis 9
  - orthogonale Vektoren 9
  - orthonormierte Basis 9
  - Ortsvektor 14
- Parabel, gewöhnliche 48
  - , kubische 36
  - , Neilsche = semikubische 36, 127
- parabolischer Nabelpunkt 97, 100
- parabolischer Punkt einer Fläche 97, 105
- parabolisch gekrümmt 97
- Parameter 75
- Parameterdarstellung 16, 38, 75
  - , äquivalente 18, 91
  - einer ebenen Kurve 38
  - einer Fläche 76, 77
  - einer Raumkurve 16
  - , vektorielle 75
- Parametertransformation 18
- Peaucellierscher Inversor 62, 131, 132
- Polarkoordinaten 56
- Pol eines Polarkoordinatensystems 56
- Pseudosphäre 94
- Punktrichtungsgleichung 43
- Rang einer Matrix 76
- Rastebene 70
- Rastpolbahn 71
- Raumkurve 17
- Rechtsschraubung 27, 32, 103
- reduzierte Ganghöhe 32
- Regelfläche 31, 108
  - , abwickelbare 108
  - , windschiefe 108
- Regel von Bernoulli-l'Hospital 54
- regulärer Punkt 77
  - , rektifizierende Ebene 24, 31
  - , Fläche 31
- Reuleaux 72
- Richtung eines Vektors 6
- Richtungssinn eines Vektors 6
- Riemannscher Raum 94, 106
- Rotationsfläche 84, 103
- Satz von Euler 104
- Satz von Lancet 32
- Satz von Meusnier 98, 99
- Scheitel einer ebenen Kurve 42
- Schleppkurve 50, 51
- Schmiegeebene 22
- Schnittwinkel zweier Flächenkurven 85, 86
- Schraubachse 32

Schraubenfläche 103, 109, 110  
 Schraubenlinie 32  
 Schraubenlinie mit kreisförmiger Achse 34, 122  
 Schraubparameter 32  
 Schraubtorse 110  
 Schraubung 32  
 Selbstberührungspunkt 55  
 singulärer Punkt bezüglich einer Parameterdarstellung 77  
 – – einer ebenen Kurve 54  
 – – eines Flächenstücks 77  
 Sinuslinie 49  
 Spat 11, 12  
 Spatprodukt 11  
 sphärische Katakaustik 89, 142  
 Spirale, archimedische 61, 128  
 –, hyperbolische 61, 129  
 –, logarithmische 61, 129  
 Spitze 55  
 starre Fläche 108  
 stereographische Projektion 113–116  
 Stirnräder 71  
 Strahl der Richtung Null 56  
 Strahlfläche 108  
 Streckebene 24  
 Subnormalenabschnitt 44  
 Subtangentenabschnitt 44  
 Summationsindex 91  
 Summationskonvention = Summationsvereinbarung 91  
 Tangentenabschnitt 43  
 Tangente einer ebenen Kurve 38, 43, 53, 55, 65  
 – einer Flächenkurve 98, 99  
 – einer Raumkurve 17  
 Tangentenfläche einer Raumkurve 108  
 – einer Schraubenlinie 110  
 Tangentenvektor  
 – einer ebenen Kurve 38, 53  
 – einer Flächenkurve 78, 79  
 – einer Raumkurve 21  
 Tangentialbeschleunigung 26  
 Tangentialebene 79, 84  
 – einer Torse 109

Taylorische Entwicklung einer Parameterdarstellung 35  
 – einer Vektorfunktion 23  
 Theorema egregium 106  
 Torse 108  
 Torsenbedingung 109  
 Torsion 26  
 Torusfläche 98  
 Totalkrümmung 31  
 Traktrix 51

Überschieben 92  
 $u^1$ -Linie 78  
 $u^2$ -Linie 78

Vektor 6  
 Vektoraddition 7  
 Vektorfunktion = vektorielle Funktion 16  
 Vektorsubtraktion 7  
 Vektor der Winkelgeschwindigkeit 31  
 vektorielle Parameterdarstellung 75  
 Vektorprodukt 10  
 Vektor, Differentiation eines 13, 17  
 Verbiegung einer Fläche 108  
 Verzahnungsgesetz 72

Wälzkreis 71  
 Wendepunkt 40  
 windschiefe Regelfläche 108  
 Windung 26  
 Winkelgeschwindigkeit 31, 32  
 winkeltreue Abbildung 107

Zahnflanke 72  
 Zahnräder 71  
 Zentripetalbeschleunigung 26  
 zulässige Parameterdarstellung einer Fläche 76, 77  
 – – eines Flächenstücks 76, 77  
 – – einer Raumkurve 16  
 zwangsläufige ebene Bewegung 70  
 zweite Grundform 13, 96  
 Zykloide, gewöhnliche gespitzte 52, 126, 127