

8. Abbildungen

Die Abbildung gehört zu den Grundbegriffen der Mathematik. Sie wird bei vielen Untersuchungen angewendet. Deshalb werden hierzu im folgenden die wesentlichsten Definitionen und Aussagen entwickelt. Sie bilden gleichzeitig die Grundlage für die beiden folgenden Abschnitte über Funktionen und Zahlenfolgen. Schließlich werden einige Anwendungen aufgezeigt. Diese tragen aber – entsprechend dem Grundlagencharakter des Abschnittes – vorrangig illustrativen und mathematischen Charakter, oder aber sie beziehen sich auf stark vereinfachte Fragestellungen der Praxis.

8.1. Abbildungsbegriff

Die Bezeichnung Abbildung ist der Umgangssprache entlehnt. Damit ist eine Schwierigkeit verbunden, denn in der Umgangssprache wird diese Bezeichnung in anderem Sinne verwendet als in der Mathematik. Umgangssprachlich kann man durchaus solche Bemerkungen wie „Mit diesem Modell ist eine gute Abbildung der Realität gelungen“ antreffen, wobei damit sowohl die Tätigkeit des Modellierens als auch ihr Ergebnis gemeint sind. Nicht selten werden auch graphische Darstellungen in Büchern als Abbildungen bezeichnet. An diese Vorstellungen knüpft der mathematische Begriff der Abbildung in gewisser Weise an, obgleich er – wie gesagt – sich von ihnen sehr wohl unterscheidet.

Zum leichteren Verständnis sei als Einführung der allen bekannte und sich seit Jahrhunderten ständig aufs Neue wiederholende Vorgang der Eheschließung betrachtet. Dabei muß selbstverständlich von vielen gesetzmäßigen Zusammenhängen und individuellen Einzelheiten abstrahiert werden, so daß sich Formulierungen ergeben, die teilweise etwas kurios anmuten. Dafür sei im voraus um Verständnis gebeten. Mathematisch läßt sich das Problem z. B. wie folgt beschreiben. In einem Kalenderjahr kann die gesamte Bevölkerung über 18 Jahre zunächst in zwei Mengen eingeteilt werden. Die eine Menge enthält als Elemente alle weiblichen Bewohner und die andere Menge enthält alle männlichen Bewohner, und zwar unabhängig davon, ob sie ledig oder verheiratet sind. Nun kann man eine dritte Mengen bilden, deren Elemente alle die Paare sind, die in dem betrachteten Kalenderjahr die Ehe schließen. Die Menge dieser Paare stellt dann eine Abbildung im mathematischen Sinne dar. So einfach läßt sich dieses Problem beschreiben, wenn man sich auf die Ebene mathematischer Abstraktionen begibt. Es muß natürlich gleichzeitig eingestanden werden, daß in der Realität bei der Bildung solcher Paare ein ganzer Komplex von Gesetzmäßigkeiten und funktionalen Zusammenhängen wirkt, der durch die obige mathematische Beschreibung in keiner Weise erfaßt werden konnte.

Im folgenden Beispiel ist ein vereinfachtes Problem der Praxis dargestellt. Es ist für die Anwendung schon interessanter.

Beispiel 8.1: Gegeben sei ein festes Zeitintervall $[t_0, t_1]$ und eine Anzahl von gleichen Maschinen, mit denen ein bestimmtes Erzeugnis, z. B. Strümpfe, hergestellt werden kann. Dann hängt die Anzahl E der in $[t_0, t_1]$ produzierten Einheiten des Erzeugnisses ab von der Zahl k der eingesetzten Maschinen. Können mit einer Maschine E_1 Einheiten des Erzeugnisses hergestellt werden, so können mit k Maschinen $E_1 k$ Einheiten produziert werden. Damit ergibt sich die Formel

$$E = f(k) \quad \text{mit} \quad f(k) = E_1 k.$$