Definition 8.7: *Sind M und N metrische Räume* (vgl. Abschnitt 7.8., s. auch Bd. 22), *so wird jede Funktion $A \subseteqq M \times N$ ein* **Operator** *genannt.* D.8.7

Definition 8.8: *Ist M ein metrischer Raum, so wird jede Funktion $A \subseteqq M \times R^1$ ein* **Funktional** *genannt.* D.8.8

Funktionale zeichnen sich also unter den Operatoren dadurch aus, daß ihr Wertebereich nicht in irgendeinem metrischen Raum, sondern in dem Raum der reellen Zahlen liegt. Mit anderen Worten, bei einem Funktional ist das Bild immer eine reelle Zahl.

Beispiel 8.8: Es sei M die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen mit der Metrik

$$d(a, b) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2}\,, \tag{8.11}$$

wobei $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ und $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ beliebige Elemente von M bezeichnen. Dann ist M ein metrischer Raum, den wir mit R^n bezeichnen, und die in Beispiel 8.6 eingeführte Abbildung A ist ein Funktional aus R^n in R^1.

Abschließend weisen wir auf eine weitere Spezifizierung des Funktionsbegriffes hin, die vorrangig mit einer zusätzlichen Forderung an seine Aussageform zusammenhängt. Eine Abbildung kann nämlich nicht nur selbst eindeutig sein, d. h. eine Funktion darstellen, sondern auch eine eindeutige Umkehrabbildung besitzen. Dieses neue charakteristische Merkmal ist Anlaß zu folgender Begriffsbildung.

Definition 8.9: *Eine Abbildung A heißt* **eineindeutig** *(oder auch* **umkehrbar eindeutig***), wenn sowohl A als auch ihre Umkehrabbildung A^{-1} eindeutig sind.* D.8.9

Es könnte der berechtigte Einwand erhoben werden, warum von eineindeutiger Abbildung und nicht einfach von eineindeutiger Funktion gesprochen wird. Es gibt nämlich keine eineindeutige Abbildung, die nicht gleichzeitig Funktion im Sinne von Definition 8.6 ist. Wenn hier dennoch von eineindeutigen Abbildungen die Rede ist, so wird damit der traditionellen Bezeichnungsweise Rechnung getragen. Es sei jedoch auch erwähnt, daß der Begriff der eineindeutigen Abbildung widerspruchslos ist und daher formal durchaus seine Berechtigung hat.

Aufgabe 8.16: Mit M_F, M_O, M_f bzw. M_A seien in dieser Reihenfolge entsprechend die Menge aller Funktionale, aller Operatoren, aller Funktionen bzw. aller Abbildungen bezeichnet. Man vergleiche diese Mengen miteinander und gebe – soweit vorhanden – Enthaltenseinsrelationen zwischen diesen Mengen an. *

Aufgabe 8.17: Gegeben seien die folgenden Abbildungen *

1) $A_1 = \{(P, z) \mid P = (x_1, x_2) \in R^2 \wedge z \in R^1 \wedge z = x_1^2 + x_2^2\}$,

2) $A_2 = \{(x, y) \mid x \in R^n \wedge y \in R^m \wedge y = (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ m < n\}$.

3) Für eine beliebige fixierte reelle Zahl $a \neq 0$ sei

$$A_3 = \{(x, y) \mid x \in R^n \wedge y \in R^n \wedge y = (ax_1, ax_2, \ldots, ax_n)\}.$$

4) Zur Produktion der Erzeugnisse $E_1, E_2, \ldots, E_m$ werden insgesamt n verschiedene Rohstoffe $R_1, R_2, \ldots, R_n$ benötigt, wobei $n > m$ sei. Mit den Bezeichnungen $M = \{E_1, E_2, \ldots, E_m\}$, $N = \{R_1, R_2, \ldots, R_n\}$ und der Aussageform $p(E_i, R_j)$, die