die dort zunächst jeweils als abhängige Variable angegebene Größe durchaus als unabhängige Variable aufgefaßt werden. Mathematisch führt die Vertauschung der Rollen von unabhängiger und abhängiger Variablen zur Umkehrfunktion.

Ist die Funktion f von der Art, daß es zu jedem $y \in W_f$ genau ein $x \in D_f$ gibt, dann heißt f *eineindeutig* oder *umkehrbar eindeutig*. Für jede eineindeutige Funktion ist also nicht nur jedem $x \in D_f$ eindeutig ein y, sondern umgekehrt auch jedem $y \in W_f$ genau ein x zugeordnet. Die letztgenannte Zuordnung bildet zusammen mit W_f als Definitionsbereich die Umkehrfunktion f^{-1}:

$$f^{-1}\colon\ x = f^{-1}(y), \quad y \in D_{f^{-1}}, \quad \text{mit} \quad D_{f^{-1}} = W_f. \tag{9.22}$$

Die Zuordnungsvorschrift $x = f^{-1}(y)$ erhält man für eineindeutige Funktionen, indem $y = f(x)$ nach x aufgelöst wird.

Es erweist sich, daß die Eineindeutigkeit der Funktion für die Existenz ihrer Umkehrfunktion auch notwendig ist, denn es gilt

S.9.2 **Satz 9.2:** *Die Eineindeutigkeit einer Funktion ist notwendig und hinreichend dafür, daß sie eine Umkehrfunktion besitzt.*

Für die praktische Ermittlung und den Umgang mit Umkehrfunktionen bezeichnet man in der Darstellung (9.22) die unabhängige Variable wieder wie üblich mit x und die abhängige Variable mit y; anstatt (9.22) wird also

$$f^{-1}\colon\ y = f^{-1}(x), \qquad x \in D_{f^{-1}} = W_f \tag{9.23}$$

geschrieben. Das hat eine vereinfachende Konsequenz für die graphische Darstellung von f und f^{-1}. Letztere ergibt sich nämlich für die Form (9.23), indem der Graph der Funktion f an der Geraden $y = x$, $x \in (-\infty, +\infty)$ „gespiegelt" wird.

Beispiel 9.7: Für die Funktion

$$f\colon\ y = e^{0,5x} - 0{,}4, \qquad x \in \left[0, \frac{3}{2}\right] \tag{9.24}$$

soll die Umkehrfunktion ermittelt werden. Zur Ermittlung von f^{-1} lösen wir die für f gegebene Zuordnungsvorschrift schrittweise nach x auf:

$$y + 0{,}4 = e^{0,5x}, \qquad 0{,}5x = \ln(y + 0{,}4)$$

und schließlich

$$x = 2\ln(y + 0{,}4).$$

Hierbei haben wir bereits den Sachverhalt benutzt (siehe Abschnitt 9.4.), daß die Logarithmusfunktion Umkehrfunktion der Exponentialfunktion ist. Man kann zeigen, daß $W_f = \left[f(0), f\left(\frac{3}{2}\right)\right] = [0{,}6;\ 1{,}72]$ ist. Daher lautet f^{-1} in der Form (9.23)

$$f^{-1}\colon\ y = 2\ln(x + 0{,}4), \qquad x \in [0{,}6;\ 1{,}72].$$

Bild 9.2 zeigt die graphische Darstellung von f und f^{-1}.

* *Aufgabe 9.5:* Man ermittle zu der Funktion

$$f\colon\ y = 2x - 1, \qquad x \in [0,3],$$

die Umkehrfunktion f^{-1} in der Form (9.23) und stelle sowohl f als auch f^{-1} graphisch dar.

Während diese Aufgabe noch relativ einfach war, ist die folgende schon schwieriger.