* *Aufgabe 9.8:* Man zeige, daß die Funktion $y = 1 - e^{2x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, in ihrem gesamten Definitionsbereich streng nonoton fallend ist.

Als Aussage mit einem gewissen Allgemeinheitsgrad erwähnen wir:

S.9.5 **Satz 9.5:** *Jede Funktion (Parabel) zweiten Grades*

$$y = x^2 + ax + b, \quad x \in (-\infty, +\infty), \tag{9.33}$$

ist in $(-\infty, x_s]$ *streng monoton fallend und in* $[x_s, +\infty)$ *streng monoton wachsend; dabei ist* $x_s = -\frac{a}{2}$ *die x-Koordinate des Scheitelpunktes der Parabel* (9.33).

* *Aufgabe 9.9:* Man beweise Satz 9.5.

Schließlich weisen wir noch auf folgende Eigenschaften monotoner Funktionen hin.

S.9.6 **Satz 9.6:**

a) *Wenn* f_1 *und* f_2 *im gleichen Intervall* I *streng monoton wachsend sind, dann ist die Summe* $f_1 + f_2$ *der beiden Funktionen sowie das Produkt* af_i $(i = 1, 2)$ *für* $a > 0$ *in* I *ebenfalls streng monoton wachsend; dagegen ist* af_i $(i = 1, 2)$ *für* $a < 0$ *in* I *streng monoton fallend.*

b) *Wenn* f *im Intervall* I *streng monoton ist, dann existiert die inverse Funktion* f^{-1}. *Die Umkehrung hiervon gilt i. allg. nicht mehr.*

c) *Wenn* f *im Intervall* I *streng monoton wachsend ist, dann ist* f^{-1} *mit* $D_{f^{-1}} = \{x \mid x \in R^1 \wedge x = f(u),\ u \in I\}$ *in jedem Intervall* $I^- \subseteqq D_{f^{-1}}$ *ebenfalls streng monoton wachsend. Analoges gilt für streng monoton fallende Funktionen.*

* *Aufgabe 9.10:* Man beweise Teil a) von Satz 9.6.

D.9.8 **Definition 9.8:** *Eine Funktion* $y = f(x)$, $x \in D_f$, *heißt im Intervall* $I \subseteqq D_f$ **konvex**, *wenn für alle* $x_1, x_2 \in I$ *und jedes* $\alpha \in [0, 1]$ *die Ungleichung*

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)\, x_2) \leqq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)\, f(x_2) \tag{9.34}$$

gilt; entsprechend wird sie **konkav** *in* I *genannt, wenn*

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)\, x_2) \geqq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)\, f(x_2) \tag{9.35}$$

für alle $x_1, x_2 \in I$ *und jedes* $\alpha \in [0, 1]$ *gilt.*

Auch für die Konvexität bzw. Konkavität einer Funktion im Intervall I ist wieder besonders wichtig, daß (9.34) bzw. (9.35) nicht nur für gewisse $x_1, x_2 \in I$, sondern für *alle* $x_1, x_2 \in I$ gültig ist.

Geometrisch kann man die Konvexität etwa wie folgt deuten (vgl. Bild 9.5). Es seien $x_1, x_2 \in I$ beliebig, und $P_i = (x_i, y_i)$ seien die zugehörigen Punkte in der graphischen Darstellung der Funktion. Dann liegt der gesamte Kurvenbogen $\widehat{P_1P_2}$ immer nicht oberhalb der Sekante $\overline{P_1P_2}$, und insbesondere liegt der Mittelpunkt der Sekante nicht unterhalb des entsprechenden Punktes des Graphen der Funktion Entsprechend läßt sich die Konkavität geometrisch interpretieren.

Es sei noch bemerkt, daß sich der Nachweis der Konvexität für stetige Funktionen (vgl. Band 2, Abschn. 3.) vereinfachen läßt: für sie genügt es nämlich zu zeigen, daß die Ungleichung (9.34) für $\alpha = \frac{1}{2}$ erfüllt ist. Davon werden wir in den folgenden Beispielen Gebrauch machen, wobei hier erst einmal unterstellt wird, daß die betrachteten Funktionen alle stetig sind. Analoges gilt für den Nachweis der Konkavität.