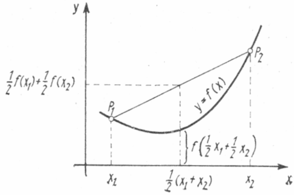

Bild 9.5.
Geometrische Interpretation der Konvexität für $\alpha = \frac{1}{2}$

Beispiel 9.10: Es sei $a \neq 0$ eine beliebig fixierte Zahl. Dann ist $y = e^{ax}$, $x \in (-\infty, +\infty)$, im gesamten Definitionsbereich konvex. Tatsächlich, die zu beweisende Ungleichung $e^{a(x_1/2 + x_2/2)} \leqq \frac{1}{2} e^{ax_1} + \frac{1}{2} e^{ax_2}$ formen wir auf die äquivalente Ungleichung

$$0 \leqq \frac{1}{2} e^{ax_1} + \frac{1}{2} e^{ax_2} - e^{a(x_1/2 + x_2/2)} \tag{9.36}$$

um. Für deren rechte Seite, die mit $r(x_1, x_2)$ bezeichnet sei, ergibt sich

$$r(x_1, x_2) = \frac{1}{2} e^{ax_1} + \frac{1}{2} e^{ax_2} - e^{ax_1/2} e^{ax_2/2} = \frac{1}{2} (e^{ax_1/2} - e^{ax_2/2})^2,$$

woraus sofort (9.36) und damit die Behauptung folgt.

Aufgabe 9.11: Man zeige, daß die Funktion $y = -x^2$, $x \in R^1$, in ihrem gesamten Definitionsbereich konkav ist. *

Eine gewisse Sonderstellung nehmen die Funktionen 1. Grades

$$y = px + q, \quad x \in R^1,$$

ein. Sie sind nämlich in ihrem gesamten Definitionsbereich sowohl konvex als auch konkav.

Zu den einfachsten Eigenschaften konvexer Funktionen gehören die folgenden:

Satz 9.7: *Die Funktionen f_1 und f_2 seien in dem gleichen Intervall I konvex. Dann ist ihre Summe $f_1 + f_2$ ebenfalls in I konvex. Die Funktion af_1 ist für $a > 0$ in I konvex, für $a < 0$ dagegen konkav. Analoge Aussagen lassen sich für konkave Funktionen formulieren.* **S.9.7**

Konvexe und konkave Funktionen spielen in zahlreichen praktischen Problemen eine Rolle. Hier seien nur einige genannt. Da sind z. B. die Krümmungslinien von Linsen und Spiegeln in der Optik; in der Ökonomie haben die sogenannten Isoquanten im Zusammenhang mit Produktionsfunktionen häufig die Eigenschaft der Konvexität. Für nicht wenige Funktionen, die den Verlauf von Prozessen aus den verschiedensten Bereichen der Realität modellieren, ist charakteristisch, daß sie monoton wachsend und konkav bzw. konvex sind.

Abschließend weisen wir noch auf zwei Eigenschaften hin, die Funktionen besitzen können.

Definition 9.9: *Eine Funktion* **D.9.9**

$$y = f(x), \quad x \in D_f,$$

heißt **gerade**, *wenn $D_f = [-a, a]$ bzw. $D_f = (-a, a)$ mit $a > 0$ gilt und wenn*

$$f(-x) = f(x) \quad \textit{für alle positiven} \quad x \in D_f \tag{9.37}$$