Achilles l Meter zurück; in der zweiten Phase durchläuft Achilles die Strecke, die von der Schildkröte in der ersten Phase zurückgelegt worden ist usw. Man gebe in zwei Zahlenfolgen die von Achilles bzw. der Schildkröte in jeder Phase zurückgelegten Strecken an.

Wir werden im weiteren häufig einfach von der Zahlenfolge

$$\{a_n\} \tag{10.3}$$

sprechen und darunter (10.1) mit $n = 1, 2, \ldots$ verstehen.

In engem Zusammenhang mit Zahlenfolgen stehen deren Teilfolgen. *Teilfolgen* einer Zahlenfolge $\{a_n\}$ erhält man wie folgt: es sei $\{k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}, \ldots\}$ eine beliebige Teilmenge der natürlichen Zahlen, wobei

$$k_1 < k_2 < \ldots < k_n < k_{n+1} < \ldots$$

gilt; dann ist $\{a_{k_n}\}$ eine *Teilfolge* von $\{a_n\}$. Wir werden das gegebenenfalls durch $\{a_{k_n}\} \subset \{a_n\}$ ausdrücken. Eine Teilfolge von $\{a_n\}$ ergibt sich also dadurch, daß gewisse Glieder dieser Folge – es müssen jedoch unendlich viele sein – ausgewählt und zu einer neuen Folge „zusammengestellt" werden.

10.2. Einfachste Eigenschaften von Zahlenfolgen

Die Darlegung der einfachsten Eigenschaften von Zahlenfolgen hat Wesentliches gemeinsam mit den entsprechenden Darlegungen für Funktionen (vgl. Abschnitt 9.3.). Deshalb empfehlen wir dem Leser, die folgenden Ausführungen insbesondere mit denen für monotone bzw. beschränkte Funktionen zu vergleichen.

D.10.1 **Definition 10.1:** *Eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ heißt* **monoton wachsend**, *wenn*

$$a_n \leqq a_{n+1} \quad \textit{für alle} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10.4}$$

gilt; entsprechend wird sie **monoton fallend** *genannt, wenn*

$$a_n \geqq a_{n+1} \quad \textit{für alle} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10.5}$$

gilt. Gelten dagegen für eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ Ungleichungen der Art (10.4) *bzw.* (10.5) *ohne Gleichheitszeichen*

$$a_n < a_{n+1} \quad \textit{für alle} \quad n = 1, 2, \ldots \tag{10.6}$$

bzw.

$$a_n > a_{n+1} \quad \textit{für alle} \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{10.7}$$

dann heißt die Folge **streng monoton wachsend** *bzw.* **streng monoton fallend.**

* *Aufgabe 10.3:* Es seien n und r zwei beliebige natürliche Zahlen mit $n < r$. Man zeige, daß dann für monoton wachsende bzw. fallende Zahlenfolgen immer die Ungleichungen

$$a_n \leqq a_r \quad \text{bzw. } a_n \geqq a_r$$

gelten.

Mit der Eigenschaft monotoner Folgen, die in der Aufgabe 10.3 formuliert ist, wird völlige Analogie zur Monotonie von Funktionen hergestellt. Dazu ist lediglich zu beachten, daß die Rolle des Arguments x von Funktionen bei Zahlenfolgen vom Index n eingenommen wird.