Diese Aussage ist bewiesen, wenn wir zeigen können, daß $|\bar{a} - \tilde{a}| = 0$ gilt. Also betrachten wir $|\bar{a} - \tilde{a}|$ etwas näher.

$$|\bar{a} - \tilde{a}| = |\bar{a} - a_n + a_n - \tilde{a}| \leqq |\bar{a} - a_n| + |a_n - \tilde{a}|.$$

Jeden der beiden Summanden $|\bar{a} - a_n|$ und $|a_n - \tilde{a}|$ kann man wegen der vorausgesetzten Konvergenz für alle hinreichend großen n kleiner als jede positive Zahl ε machen. Daher ergibt sich $|\bar{a} - \tilde{a}| < 2\varepsilon$, und da ε eine beliebige positive Zahl ist, folgt (vgl. Lösung der Aufgabe 10.12) $|\bar{a} - \tilde{a}| = 0$ oder $\bar{a} = \tilde{a}$.

* *Aufgabe 10.12:* Man überlege sich, ob es nichtnegative Zahlen gibt, die kleiner als alle positiven Zahlen sind.

* *Aufgabe 10.13:* Man zeige, daß für die Zahlenfolge $\{s_n\}$, $s_n = \sum_{i=1}^{n} q^i$, $n = 1, 2, \ldots$, $0 \leqq q < 1$, die Grenzwertrelation $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{q}{1-q}$ gilt.

Durchaus nicht jede Zahlenfolge besitzt einen Grenzwert im Sinne der Definition 10.4. Zahlenfolgen, die keinen Grenzwert besitzen, also nicht konvergent sind, werden *divergent* genannt. Die Menge aller divergenten Zahlenfolgen wird ihrerseits noch einmal unterteilt in bestimmt und unbestimmt divergente Zahlenfolgen.

D.10.5 **Definition 10.5:** *Eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ heißt* **bestimmt divergent**, *wenn es zu jeder beliebig großen Zahl $A > 0$ eine natürliche Zahl $N(A)$ derart gibt, daß*

$$a_n > A \qquad \textit{für alle} \quad n \geqq N(A)$$

bzw.

$$a_n < -A \qquad \textit{für alle} \quad n \geqq N(A).$$

Diese beiden Fälle werden kurz ausgedrückt durch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \quad \textit{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Gilt dagegen keiner dieser beiden Fälle und ist die Zahlenfolge auch nicht konvergent, so heißt sie **unbestimmt divergent**.

Ohne auf Einzelheiten einzugehen, weisen wir auf folgende Beispiele hin.

Beispiel 10.9: Für die Folge $\{a_n\}$, $a_n = aq^{n-1}$, mit $q > 1$ und $a > 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Beispiel 10.10: Für die Folge $\{b_n\}$, $b_n = bq^{n-1}$, mit $q > 1$ und $b < 0$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

Beispiel 10.11: Die Folge $\{c_n\}$, $c_n = cq^{n-1}$, mit $q < -1$ und $c > 0$ ist unbestimmt divergent.

10.5. Eigenschaften von und Rechnen mit konvergenten Zahlenfolgen

Wir folgen unserer bisherigen Methodik. Im vorangehenden Abschnitt wurde ein neues mathematisches Objekt – die konvergente Zahlenfolge – eingeführt. Jetzt untersuchen wir dessen wesentlichste Eigenschaften und insbesondere die Möglichkeiten, mit diesem Objekt zu rechnen. Dabei werden wir zwar die Existenz des Grenzwertes,