Dabei gelten bezüglich der Grenzwerte die Formeln

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = a \pm b, \tag{10.18}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n b_n = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = ab, \tag{10.19}$$

$$\lim_{n\to\infty} c a_n = c \lim_{n\to\infty} a_n = ca. \tag{10.20}$$

Satz 10.9: *Wenn bezüglich der beiden Folgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ die gleichen Voraussetzungen wie in Satz* 10.8 *erfüllt sind und zusätzlich $b \neq 0$ sowie $b_n \neq 0$, $n = 1, 2, \ldots$, gilt, dann ist auch der Quotient $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ wieder eine konvergente Folge. Dabei gilt bezüglich des Grenzwertes dieser Folge* **S.10.9**

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}. \tag{10.21}$$

Den Beweis dieser Sätze führen wir nur für (10.19). Nach den einführenden Bemerkungen von Abschnitt 10.4. genügt es zu zeigen, daß die Folge der Abstände $\{d_n\}$, $d_n = |a_n b_n - ab|$, eine Nullfolge ist. Hierzu bemerken wir

$$|a_n b_n - ab| = |a_n b_n - ab_n + ab_n - ab| \leqq |b_n|\,|a_n - a| + |a|\,|b_n - b|. \tag{10.22}$$

Beachtet man nun, daß $\{b_n\}$ eine beschränkte Folge ist (siehe Satz 10.5) und $\{|a_n - a|\}$ sowie $\{|b_n - b|\}$ Nullfolgen sind, so steht auf der rechten Seite von (10.22) die Summe zweier Nullfolgen. Dann folgt aber auch $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n b_n - ab| = 0$, womit (10.19) bewiesen ist.

Die Formeln (10.18) bis (10.21) gestatten es, in einer Reihe von Fällen die Grenzwerte konvergenter Folgen zu ermitteln. Das gilt insbesondere für Folgen der Art

$$\{a_n\} \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{P(n)}{R(n)}, \tag{10.23}$$

wobei $P(n)$ und $R(n)$ Polynome sind und $R(n)$ höheren oder gleichen Grades wie $P(n)$ ist.

Beispiel 10.14: Wir betrachten noch einmal die Folge aus Beispiel 10.8. Zur Anwendung der obigen Formeln formen wir das allgemeine Glied a_n dieser Folge zunächst in entsprechender Weise um:

$$a_n = \frac{1 + 3n + 5n^2}{4n^2} = \frac{n^2\left(\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} + 5\right)}{4n^2} = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{3}{n} + 5}{4}.$$

Wendet man nun erst (10.21) und danach auf den dabei entstehenden Zähler (10.18) an und beachtet (10.13), so erhält man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n} + \lim\limits_{n\to\infty} 5}{\lim\limits_{n\to\infty} 4} = \frac{5}{4}.$$