Damit ist die obige Behauptung für $0 < k \leqq 1$ bewiesen. Für beliebiges $k > 1$ gilt aber

$$a_n = \frac{a^n}{n^k} = \left(\frac{\tilde{a}^n}{n}\right)^k \quad \text{mit} \quad \tilde{a} = a^{\frac{1}{k}} > 1 .$$

Hieraus ergibt sich wegen $k > 1$

$$a_n > \frac{\tilde{a}^n}{n},$$

woraus wegen (10.28) auch

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$$

folgt. Damit ist die obige Behauptung für die Folge (10.25) vollständig bewiesen. Man vergleiche dieses Ergebnis mit dem der Aufgabe 10.18.

Wir wenden nun die Hilfsungleichung (10.26) für Konvergenzuntersuchungen der Folge

$$\{a_n\}, \quad a_n = \sqrt[n]{n},$$

an. Da $\sqrt[n]{n} > 1$ für alle $n = 2, 3, \ldots$ gilt, kann man hier $a = \sqrt[n]{n}$ setzen; das liefert

$$n > \frac{n^2}{4}\left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^2 \quad \text{oder} \quad \frac{2}{\sqrt{n}} + 1 > \sqrt[n]{n} > 1 .$$

Hieraus folgt mit Satz 10.11 wegen der offensichtlichen Beziehung

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{2}{\sqrt{n}}\right) = 1$$

auch

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1 . \tag{10.29}$$

Dieses Resultat kann u. a. wie folgt angewendet werden.

*Beispiel 10.18:* Es gilt die Limesrelation

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\lg n}{n} = 0 . \tag{10.30}$$

Tatsächlich, wegen (10.29) sowie wegen $10^\varepsilon > 1$, $\varepsilon > 0$, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$ derart, daß

$$1 < \sqrt[n]{n} < 10^\varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geqq N(\varepsilon) .$$

Berücksichtigt man, daß die Logarithmusfunktion monoton wachsend ist, so folgt

$$\lg 1 < \lg \sqrt[n]{n} < \lg 10^\varepsilon ,$$

woraus sich auf Grund der Eigenschaften der Logarithmusfunktion die Ungleichung

$$0 < \frac{1}{n} \lg n < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad n \geqq N(\varepsilon)$$