5.15: a) $z^3 = 3 - i\sqrt{3} = \sqrt{12}\,(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$; $w_k^{(3)} = \sqrt[6]{12}\,[\cos(110^\circ + k \cdot 120^\circ) + i \sin(110^\circ + k \cdot 120^\circ)]$, $k = 0, 1, 2$; $w_0^{(3)} = \sqrt[6]{12}\,(\cos 110^\circ + i \sin 110^\circ) = -0.52 + 1.42i$; $w_1^{(3)} = \sqrt[6]{12}\,(\cos 230^\circ + i \sin 230^\circ) = -0.97 - 1.16i$, $w_2^{(3)} = \sqrt[6]{12}\,(\cos 350^\circ + i \sin 350^\circ) = 1.49 - 0{,}26i$ (Bild L.5.4a);

b) $z^4 = 81 = 81\,(\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$; $w_k^{(4)} = 3\left(\cos k\dfrac{\pi}{2} + i \sin k\dfrac{\pi}{2}\right)$; $k = 0, 1, 2, 3$; $w_0^{(4)} = 3$, $w_1^{(4)} = 3i$, $w_2^{(4)} = -3$, $w_3^{(4)} = -3i$ (Bild L.5.4b).

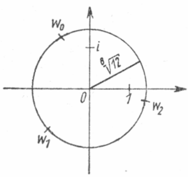

Bild L.5.4a

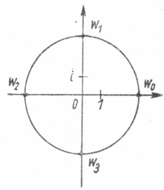

Bild L.5.4b

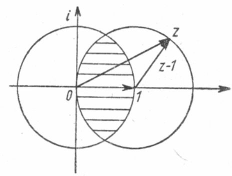

Bild L.5.5

5.16: a) $z = r\,e^{i\varphi}$, $|z| = r < 1$, stellt das Innere des Einheitskreises dar. $|z - 1| < 1$ stellt das Innere des Kreises mit dem Mittelpunkt $z_0 = 1$ und dem Radius 1 dar. Im schraffierten Bereich liegen die gesuchten komplexen Zahlen (Bild L.5.5). b) $z \cdot \bar{z} = r\,e^{i\varphi} \cdot r\,e^{-i\varphi} = r^2 = 1$. Die entsprechenden Punkte liegen auf dem Einheitskreis. c) $|\arg z| < \dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \arg z < +\dfrac{\pi}{2}$, $-\dfrac{\pi}{2} < \varphi < +\dfrac{\pi}{2}$ (rechte Halbebene). d) $z = a + ib$; $|a| + |b| = 1$ (Bild L.5.6). e) $z = a + ib$; $|a| \cdot |b| = 1$ (Bild L.5.7).

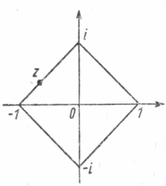

Bild L.5.6

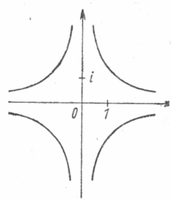

Bild L.5.7

6.1: Permutationen ohne Wiederholung (es werden alle 3 zur Verfügung stehenden Farben verwendet; keine Farbe soll mehrfach an einem Rohr vorkommen): $P_3 = 3! = 6$.

6.2: Kombinationen ohne Wiederholung: $n = 6$, $k = 1, 2, \ldots, 6$; $C_{\text{ges}} = \sum\limits_{k=1}^{6} C_6^k = \dbinom{6}{1} + \dbinom{6}{2} + \ldots + \dbinom{6}{6} = 63$.

6.3: Hier wird die Anzahl der Elemente n gesucht, wobei jeweils die Mindestanzahl 15 der notwendigen Zusammenstellungen vorgegeben ist. a) Variationen mit Wiederholung: $V_{w_n}^2 = n^2 \geqq 15$. Man benötigt also mindestens 4 Farben.

b) Kombinationen mit Wiederholung: $C_{w_n}^2 = \dbinom{n + 2 - 1}{2} = \dbinom{n + 1}{2} = \dfrac{(n + 1)\,n}{2} \geqq 15$, $n^2 + n - 30 \geqq 0$, $n \geqq 5$. Man benötigt also mindestens 5 Farben.