8.9: Mit den Bezeichnungen der Lösung von Aufgabe 8.7, Teil b) ergibt sich $A = \{(T, p) \mid T \in [T_1, T_2] \wedge p \in R^1 \wedge p = \gamma V^{-1} T\}$. Die zu (8.3) analoge Möglichkeit der Darstellung von A ergibt sich, wenn man mit $p_A(T, p)$ die Aussageform „$p = \gamma V^{-1} T \wedge T \in [T_1, T_2]$“ bezeichnet:
$A = \{(T, p) \mid T \in R^1 \wedge p \in R^1 \wedge p_A(T, p)\}$.

8.10: Ist $p(G, V)$ die Aussageform „Zwischen der Gießerei G und dem Verbraucher V bestehen verträgliche Beziehungen“, so lautet die gesuchte Darstellung $A = \{(G, V) \mid G \in M \wedge V \in N \wedge p(G, V)\}$.

8.11: Ist k die Kraft, m die Masse und b die Beschleunigung des Körpers, so folgt aus der Aufgabenstellung die Formel $k = mb$. Nehmen wir nun an, daß die Beschleunigung nur Werte aus dem Intervall $[b_1, b_2]$ annehmen kann, so ergibt sich $A = \{(b, k) \mid b \in [b_1, b_2] \wedge k \in R^1 \wedge k = mb\}$.

8.12: a) $A = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)\}$.
b) siehe schraffierte Halbebene einschließlich der Geraden $y = -x + 4$ in Bild L.8.4.

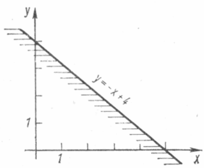

Bild L.8.4

8.13: A_1 ist keine lineare Abbildung, weil der Linearkombination von Originalen im allgemeinen nicht die Linearkombination ihrer Bilder entspricht, d. h. weil aus $(x_i, y_i) \in A_1$, $i = 1, 2$, i. allg. nicht $(a_1 x_1 + a_2 x_2, a_1 y_1 + a_2 y_2) \in A_1$ folgt. Dagegen ist A_2 eine lineare Abbildung. A_3 ist wiederum keine lineare Abbildung, weil ihr Definitionsbereich $[-3, 4]$ kein linearer Raum ist.

8.14: $A^{-1} = \{(4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3)\}$, wobei $D_{A^{-1}} = \{0, 1, 4, 9\}$ und $W_{A^{-1}} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ gilt.

8.15: Es seien zwei beliebige Elemente $(m, a_1), (m, a_2) \in A$ gegeben. Dann ist m eine der Maschinen in der Halle und a_1 sowie a_2 sind Arbeiter, die sie bedienen. Da nach der Aufgabenstellung jede Maschine immer nur vom gleichen Arbeiter bedient werden soll, muß $a_1 = a_2$ gelten. Also ist A eine Funktion. Damit ist ein Zusammenhang, der nicht quantitativer Natur ist (nämlich der zwischen Maschinen und den sie bedienenden Arbeitern), durch eine Funktion modelliert.

8.16: $M_F \subset M_O \subset M_f \subset M_A$.

8.17: A_1 ist eindeutig, denn zu jedem Original $P = (x_1, x_2) \in R^2$ gehört ein eindeutig bestimmtes Bild $z = x_1^2 + x_2^2$. Dagegen ist A_1^{-1} nicht mehr eindeutig, weil z. B. $(4, P_0)$, $(4, P_1) \in A_1^{-1}$ gilt, obwohl $P_0 = (2, 0)$ verschieden von $P_1 = (0, 2)$ ist. Also ist A_1 zwar eindeutig, jedoch nicht eineindeutig. Außerdem ist A_1 nach Definition 2.8 ein Funktional.

A_2 ist ebenfalls eindeutig, jedoch nicht eineindeutig. Ersteres folgt daraus, daß jedem Original $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n) \in R^n$ ein eindeutig bestimmtes Bild $y = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ zugeordnet ist. Letzteres folgt daraus, daß unterschiedlichen Elementen von R^n wie $(x_1, \ldots, x_m, 0, \ldots, 0)$ und $(x_1, \ldots, x_m, 1, \ldots, 1)$ das gleiche $y = (x_1, \ldots, x_m)$ zugeordnet ist und daher A_2^{-1} nicht eindeutig ist. Außerdem ist A_2 nach Definition 2.7 ein Operator, jedoch – wenn $1 < m$ – kein Funktional. Dieser Operator wird auch *Projektion* von R^n auf R^m genannt.

A_3 ist eineindeutig. Das prüft man leicht nach. Außerdem ist A_3 für $1 < n$ ein Operator, jedoch kein Funktional. Er wird für $a = -1$ *Spiegelung am Koordinatenursprung* und für $0 < a < 1$ *Kontraktion* genannt.

A_4 ist nicht eindeutig und kann deshalb auch nicht eineindeutig sein. Letzteres ist trivial, ersteres folgt daraus, daß $n > m$ ist. Daher muß es wenigstens ein Erzeugnis geben, für dessen Produktion mehr als ein Rohstoff benötigt wird. Daher ist A_4 auch nur eine Abbildung.

9.1: Für die gesuchten Zahlen muß gelten $a_1 = a_2 = a$ mit $a \geqq 3$.