4. Einige Beweisprinzipien

Die nachfolgenden Ausführungen enthalten einige wichtige *logische Schlüsse* und die *Methode der vollständigen Induktion* als Beweisprinzipien. Die logischen Schlüsse, welche zuerst behandelt werden, knüpfen unmittelbar an die Grundbegriffe der Logik aus Abschnitt 3. an und sind selbst ein wesentlicher Bestandteil der Logik. Wir werden sie hier an Beispielen erläutern.

4.1. Logische Schlüsse

Beim Beweisen mathematischer Aussagen steht häufig das Problem, daß nicht sofort eine Beweisidee vorhanden ist oder ein direkter Beweis entweder nur schwer oder nicht möglich ist. Betrachten wir zur Erläuterung folgendes

Beispiel 4.1: Man beweise: Wenn α und β zwei gleiche Winkel über einer Strecke $\overline{P_1P_2}$ sind, so geht der durch die Punkte P_1, P_2, P_3 bestimmte Kreis K auch durch den Punkt P_4. (In Bild 4.1 ist zu sehen, daß der Winkel bei P_3 mit α, der Winkel bei P_4 mit β bezeichnet wird.)

Mit den Hilfsmitteln, die in der Logik bereitgestellt werden, sind wir bereits in der Lage, die zu beweisende mathematische Aussage als Aussagenverbindung darzustellen. Bezeichnen nämlich

$p =$ „α und β sind zwei gleiche Winkel über $\overline{P_1P_2}$“

$q =$ „P_4 liegt auf dem Kreis K“

zweiwertige Aussagen, so haben wir zu beweisen, daß

$p \rightarrow q$ eine wahre Aussage ist.

Ein direkter Beweis dieser Implikation gelingt nicht ohne weiteres, und deshalb wird der Beweis mit Hilfe einer Methode des indirekten Beweisens geführt. Man zeigt:

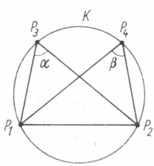

Bild 4.1

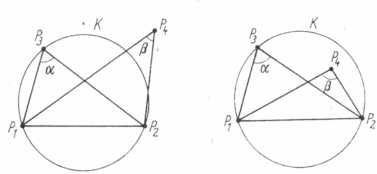

Bild 4.2

Wenn der Punkt P_4 nicht auf dem Kreis K liegt, so ist α ungleich β. Wie Bild 4.2 zeigt, zerfällt die Aussage $\bar{q} =$ „P_4 liegt nicht auf dem Kreis K“ in zwei Fälle:

$\bar{q}_1 =$ „P_4 liegt außerhalb K“

$\bar{q}_2 =$ „P_4 liegt innerhalb K“,

d. h. es gilt

$\bar{q} =$ entweder $\bar{q}_1$ oder $\bar{q}_2$.