In jedem dieser beiden Fälle kann man beweisen (der Beweis wird unter Verwendung des Peripheriewinkelsatzes und eines Satzes über Außenwinkel am Dreieck geführt), daß α ungleich β ist, d. h.

$$\bar{q}_1 \to \bar{p} \quad \text{und} \quad \bar{q}_2 \to \bar{p}$$

sind wahre Aussagen.

Aufgabe 4.1: Man beweise, daß $\bar{q}_1 \to \bar{p}$ und $\bar{q}_2 \to \bar{p}$ wahre Aussagen sind. *

Die Frage ist nun, wieso wir auf Grund dessen, daß $\bar{q}_1 \to \bar{p}$ und $\bar{q}_2 \to \bar{p}$ wahre Aussagen sind, darauf schließen können, daß auch $p \to q$ eine wahre Aussage ist. Der wesentliche Schritt hierbei ist, daß wir begründen:

Es genügt zu wissen, daß $\bar{q} \to \bar{p}$, $\bar{q} \to \bar{p}$ = Wenn „P_4 nicht auf K“ liegt, so gilt „Winkel α ist verschieden Winkel β“, eine wahre Aussage ist, um folgern zu können, daß auch $p \to q$ wahr ist. Falls eine solche Begründung möglich ist, gilt sie natürlich für alle Beispiele, in denen man den Beweis von $p \to q$ durch den Beweis von $\bar{q} \to \bar{p}$ ersetzen möchte. Wir verlassen also zunächst das Beispiel und stellen uns unter p, q beliebige Aussagen vor.

Die oben genannte Begründung kann man wie folgt formulieren:

I. Es ist zu zeigen, daß $\bar{q} \to \bar{p}$ eine wahre Aussage ist.

II. Die Aussagenverbindung

$$(\bar{q} \to \bar{p}) \to (p \to q) \tag{4.1}$$

ist immer eine wahre Aussage, ganz gleich welche konkreten (wahren oder falschen) Aussagen p und q darstellen (Beweis s. Tabelle 4.1).

III. Demzufolge ist auch $(\bar{q} \to \bar{p}) \wedge ((\bar{q} \to \bar{p}) \to (p \to q))$ als Konjunktion zweier wahrer Aussagen, wiederum wahr (Tabelle 3.3).

IV. Weil die Aussage

$$(s \wedge (s \to t)) \to t \tag{4.2}$$

unabhängig davon, welche konkreten (wahren oder falschen) Aussagen s, t in diese Verbindung eingehen, immer wahr ist, können wir mit $s = \bar{q} \to \bar{p}$ und $t = p \to q$ auf die Wahrheit der Aussage $p \to q$ schließen (Beweis siehe Tabelle 4.2). (Auf Grund der Wahrheitstabelle der Implikation (Tabelle 3.5) muß bei Richtigkeit der Voraussetzung und der Implikation auch die Behauptung wahr sein.)

Sicherlich ist diese Begründung beim ersten Lesen schwer zu verstehen. Andererseits stellt sie aber das Muster für das Verständnis aller logischen Schlüsse dar und sollte deshalb gut durchdacht werden. In den Punkten II. und IV. sind zwei Behauptungen formuliert, die die entscheidende Rolle für die Stichhaltigkeit unserer Begründung spielen.

Wir behaupten, daß die Aussagenverbindungen (4.1) und (4.2) immer wahre Aussagen darstellen. Den Beweis dafür können wir leicht mit Hilfe der Wahrheitstabellen führen.

In der letzten Zeile dieser Wahrheitstabellen steht jeweils nur das Symbol W, d. h. die Aussagenverbindungen sind immer wahr, ganz gleich ob p, q, r, s wahr oder falsch sind.