4.2. Beispiele zur Anwendung logischer Schlüsse beim Führen von Beweisen

Die *logischen Schlüsse* können beim Beweisen mathematischer Aussagen bei einer geschickten Umformulierung des Problems helfen, so daß die neuen Aussagen zumindest einfacher beweisbar sind. Für solche Anwendungen jedoch gibt es kaum Rezepte. Die nachfolgenden Beispiele sollen das Vorgehen zur Anwendung logischer Schlüsse bei der Beweisführung illustrieren.

4.2.1. Zur Anwendung der Abtrennungsregel

Die Abtrennungsregel zeigt, wie man aus einer Implikation auf eine Aussage q richtig schließt. Die Richtigkeit von q kann demnach gefolgert werden, wenn man eine Voraussetzung p kennt und die Gültigkeit von $p \to q$ zeigt.

Insbesondere heißt das: Im allgemeinen darf aus der Gültigkeit von $p \to q$ nicht auf die von q geschlossen werden, d. h. $(p \to q) \to q$ ist keine Tautologie (Beweis: Tabelle 4.8).

Tabelle 4.8. $(p \to q) \to q$

p	F	W	F	W
q	F	F	W	W
$r = p \to q$	W	F	W	W
$r \to q$	F	W	W	W

Man sieht aus dieser Tabelle 4.8 auch, wann dieser Schluß falsch ist: $(w(p) = w(q) = F)$. Insbesondere sehen wir auch folgendes: Die Folgerungen aus falschen Voraussetzungen können, müssen aber nicht falsch sein.

Beispiel 4.2:

1. Der Satz „Wenn $(-1) = (+1)$, so $1 = 1$" ist richtig und auch „$1 = 1$" ist eine wahre Aussage.
2. Der Satz „Wenn $(-1) < (-2)$, so $1 < 0$" ist wahr, aber „$1 < 0$" ist eine falsche Aussage.
   ($1 < 0$ kann aus $(-1) < (-2)$ durch Addition von 2 gefolgert werden.)
   Es wäre also falsch, aus der Richtigkeit von „Wenn $(-1) < (-2)$, so $1 < 0$" auf die von „$1 < 0$" zu schließen.

4.2.2. Direktes und indirektes Beweisen

Wir beginnen mit einem sehr einfachen Beispiel. Es ist uns bekannt, daß der Satz „Wenn $1 = 1$ ist, so ist $-1 = +1$" falsch ist. Nun gibt es aber auch andere, kompliziertere Aussagen, bei denen man nicht sofort sieht, ob es sich um eine wahre oder falsche Aussage handelt. Leider ist in solchen Fällen das folgende falsche Schließen recht häufig üblich. Man nimmt die Behauptung und rechnet so lange, bis man zur Voraussetzung kommt und meint, man habe damit den Satz bewiesen, d. h., man will $p \to q$ zeigen, indem man $q \to p$ zeigt. Der Leser kann sich aber leicht davon überzeugen, daß

$$(q \to p) \to (p \to q)$$

keine Tautologie ist, und aus diesem Grunde führt die genannte Vorgehensweise im allgemeinen zu falschen Ergebnissen.