S.4.1 **Satz 4.1** *(Methode der vollständigen Induktion): Eine Aussage* $q = (\forall n)\, p(n)$ *mit* $X = \{n \mid n$ *natürliche Zahl* $\wedge\, n \geqq a\}$ *ist genau dann eine wahre Aussage, wenn gilt:*
(1) $p(a)$ *ist eine wahre Aussage.*
(2) *Aus der Annahme, daß* $p(k)$ *für ein beliebiges festes* $n = k \geqq a$ *eine wahre Aussage ist, folgt, daß auch* $p(k+1)$ *eine wahre Aussage ist.*

Wir formulieren diese Methode hier als Satz und wollen uns darauf beschränken, diesen Satz etwas plausibel zu machen.

Nach (1) wissen wir, daß $p(a)$ gilt. Setzen wir in (2) $k = a$, so gilt wegen (2) auch $p(a+1)$. Setzen wir nun $k = a + 1$, so folgt wegen (2) die Gültigkeit von $p(a+2)$. Fahren wir so fort, so durchlaufen wir offenbar die gesamte Menge der natürlichen Zahlen $\geqq a$.

Um bei konkreten Aufgaben Satz 4.1 anwenden zu können, formulieren wir noch ein Schema, nach dem man beim Beweis immer vorgehen kann.

I. Man zeige: Es gilt $p(a)$. *(Induktionsbeginn)*

II. Man nehme an: $p(k)$ ist für ein beliebiges $n = k \geqq a$ eine wahre Aussage. *(Induktionsannahme)*

III. Man zeige: Unter der Voraussetzung II. ist auch $p(k+1)$ eine wahre Aussage. *(Induktionsschritt)*

IV. Bei Gültigkeit von I., II., III. kann man folgern: $q = (\forall n)\, p(n)$ mit $X = \{n \mid n$ natürliche Zahl $\wedge\, n \geqq a\}$ ist eine wahre Aussage. *(Induktionsschluß)*

Beispiel 4.8: Wir betrachten die Aussage (1) aus Beispiel 4.7. Setzen wir $n = 0, 1, 2, \ldots, 10$ ein, so erhalten wir die Primzahlen 41, 43, 47, 53, 61, 71, 83, 97, 113, 131, 151, … Man ist also geneigt, daraus zu folgern, daß die Aussage richtig ist. Wenn wir aber versuchen, für dieses Beispiel den Schritt III. durchzuführen, so merken wir, daß dies nicht gelingt. Das bedeutet, daß die Aussage „$n^2 + n + 41$ liefert nur Primzahlen" nicht nachgewiesen werden kann. Es ist deshalb zweckmäßig zu prüfen, ob diese Aussage falsch ist. In der Tat: Für $n = 0, \ldots, 39$ erhalten wir nur Primzahlen, für $n = 40$ jedoch ist $40^2 + 40 + 41$ keine Primzahl.

Das Beispiel zeigt: Es ist im allgemeinen falsch, aus der Gültigkeit von Aussagen $p(a), p(a+1), \ldots, p(a+b)$ auf die Allgemeingültigkeit zu schließen.

Beispiel 4.9: Wir betrachten die Aussage (2) aus Beispiel 4.7:

I. $a = 1$. Es gilt: $S_1 = \dfrac{1}{1 \cdot 2} = \dfrac{1}{1+1}$.

II. Es sei $S_k = \dfrac{1}{1 \cdot 2} + \dfrac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \dfrac{1}{k \cdot (k+1)} = \dfrac{k}{k+1}$

für ein beliebiges $k \geqq 1$ gültig.

III. Unter der Annahme II. ist zu zeigen:

$$\text{Es gilt: } S_{k+1} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(k+1) \cdot ((k+1)+1)} = \frac{k+1}{(k+1)+1}.$$