3. Aus $a < b$ folgt $-a > -b$.

Denn addieren wir nach III.4. auf beiden Seiten von $a < b$ die Summe $(-a) + (-b)$, so folgt
$$a + [(-a) + (-b)] < b + [(-a) + (-b)].$$
Nach Umformungen gemäß III.2., III.3. und Regel 2 erhalten wir
$$\begin{aligned}[a + (-a)] + (-b) &< b + [(-b) + (-a)],\\ 0 - b &< [b + (-(b)] + (-a),\\ -b &< 0 - a,\\ -b &< -a.\end{aligned}$$

4. Für alle a gilt $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

Denn es ist $b + 0 = b$. Beide Seiten der Gleichung können mit a multipliziert werden: $(b + 0) \cdot a = b \cdot a$. Wegen V.4. folgt daraus $b \cdot a + 0 \cdot a = b \cdot a$. Aus Satz 5.1 folgt $0 \cdot a = 0$.

5. Wenn $b \cdot a = 0$ ist und $b \neq 0$, so muß $a = 0$ sein.

Denn es ist $a = \frac{0}{b}$ und auch $0 = \frac{0}{b}$ wegen $b \cdot 0 = 0$ (Regel 4). Aus der Eindeutigkeit für a nach VI. folgt somit $a = 0$.

6. Es gilt $a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$.

Diese Beziehung folgt nach Anwendung von V.2., V.4., Regel 2, III.3. und IV. aus:
$$\begin{aligned} a \cdot (b - c) + a \cdot c &= (b - c) \cdot a + c \cdot a = [(b - c) + c] \cdot a\\ &= [(b + (-c)) + c] \cdot a = [b + ((-c) + c)] \cdot a = [b + 0] \cdot a = b \cdot a = a \cdot b.\end{aligned}$$

7. Aus $a < b$ und $a, b > 0$ folgt $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

Zum Beweis multiplizieren wir beide Seiten der Ungleichung $a < b$ mit der positiven Zahl $\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}$. Wegen V.2. und V.3. und $a \cdot \frac{1}{a} = 1$ bzw. $b \cdot \frac{1}{b} = 1$ folgt dann die Behauptung.

In den Beispielen sind einige wichtige, wenn auch sehr einfache Rechenregeln unter Verwendung der Grundgesetze abgeleitet worden. Selbstverständlich lassen sich auch weiterführende arithmetische Regeln gewinnen, wie etwa bei der Klammerrechnung, der Faktorenzerlegung, der Bruchrechnung oder der Potenzrechnung mit ganzen Exponenten.

* *Aufgabe 5.1:* Leiten Sie durch exakte Schlußweise aus den Grundgesetzen der Arithmetik die Regel
$$-(a + b) = (-a) + (-b) = -a - b$$
ab.

Veranschaulichung der rationalen Zahlen auf der Zahlengeraden

Die rationalen Zahlen lassen sich auf Punkte einer orientierten Geraden abbilden. Diese geometrische Veranschaulichung ist nicht aus dem Axiomensystem der Grundgesetze herleitbar, sondern eine an und für sich unnötige, aber in vielerlei Hinsicht zweckmäßige Anleihe bei der Geometrie.

Wir legen zunächst zwei Punkte O und E auf der Geraden fest, O links von E, und haben damit eine Orientierung gewonnen, wenn wir die Richtung von O nach E als positive festlegen. Ferner wird die Strecke $\overline{OE}$ als Längeneinheit angesehen und nach beiden Seiten von O wiederholt abgetragen (Bild 5.1).