Bei der Division von z_1 durch z_2 bekommen wir

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,e^{i\varphi_1}}{r_2\,e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}\,e^{i(\varphi_1-\varphi_2)} = R\cdot e^{i\psi} = R\,(\cos\psi + i\sin\psi)$$

mit

$$R = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{und} \quad \psi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Das Resultat ist jetzt: Man erhält den Quotienten zweier komplexer Zahlen, indem man ihre Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert.

Beispiel 5.10: Wir berechnen noch einmal $\frac{1+i}{1-i}$ (Bild 5.12.). Die Beträge von Zähler und Nenner sind $\sqrt{2}$, ihr Quotient mithin 1. Das Argument des Zählers ist $+\frac{\pi}{4}$, das des Nenners $-\frac{\pi}{4}$ und somit die Differenz $+\frac{\pi}{2}$. Die komplexe Zahl mit dem Betrag 1 und dem Argument $+\frac{\pi}{2}$ ist i, und somit ist $\frac{1+i}{1-i} = i$.

Abschließend sei bemerkt, daß für das Rechnen mit den Beträgen folgende Regeln gelten:

1. $||z_1| - |z_2|| \leqq |z_1 + z_2| \leqq |z_1| + |z_2|$ (*Dreiecksungleichungen*), (5.11)
2. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,
3. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad z_2 \neq 0.$

5.3.4. Potenzieren, Radizieren und Logarithmieren von komplexen Zahlen

Potenzieren

Wir multiplizieren zunächst n komplexe Zahlen

$$z_k = r_k\,e^{i\varphi_k}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

miteinander und erhalten das Produkt:

$$z_1 \cdot z_2 \ldots z_n = r_1 r_2 \ldots r_n\,e^{i(\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_n)}.$$

Setzen wir darin

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z, \quad \text{also} \quad r_1 = r_2 = \ldots = r_n = r \quad \text{und}$$
$$\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_n = \varphi, \quad \text{so folgt}$$
$$z^n = [r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = [r\,e^{i\varphi}]^n = r^n\,e^{in\varphi}$$
$$= r^n\,(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \quad \text{mit} \quad n > 0, \text{ganz}.$$

Hieraus entnehmen wir die wichtige Beziehung

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi, \quad n > 0, \text{ganz}. \tag{5.12}$$

Dieser Ausdruck wird *Moivresche Formel* genannt.

Diese Formel gilt auch für beliebige rationale Exponenten (ohne Beweis):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^{\frac{p}{q}} = \cos\left(\frac{p}{q}\cdot\varphi\right) + i\sin\left(\frac{p}{q}\cdot\varphi\right), \quad p, q \text{ ganz}, q > 0, -\pi < \varphi \leqq \pi. \tag{5.13}$$