6. Kombinatorik

6.1. Einführung

6.1.1. Auswahl- und Anordnungsprobleme

Die Aufgaben der Kombinatorik lassen sich von Auswahl- oder Anordnungsproblemen herleiten. Bei vielen praktischen und mathematischen Problemen ist die Kenntnis der Anzahl verschiedener Zusammenstellungen von ausgewählten Elementen einer endlichen Menge wichtig. Diese Elemente können Zahlen, Buchstaben, Personen, Gegenstände, Versuche, Ereignisse u. a. sein. Wir werden sie in der Regel mit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bezeichnen.

Dabei wird zu beachten sein, daß verschiedene Elemente auch durch verschiedene Bezeichnungen und gleiche Elemente immer durch ein und dieselbe Bezeichnung dargestellt werden. Zwei Zusammenstellungen sind grundsätzlich verschieden, wenn sie nicht die gleiche Anzahl von Elementen enthalten oder wenn in ihnen nicht genau die gleichen Elemente auftreten. Zum Beispiel sind die Zusammenstellungen $a_1\, a_2\, a_3$ und $a_1\, a_3$ bzw. $a_1\, a_2\, a_3$ und $a_1\, a_2\, a_4$ jeweils voneinander verschieden.

Im folgenden sollen die sechs Grundaufgaben erläutert werden, auf die sich alle Probleme der Kombinatorik im wesentlichen zurückführen lassen.

Bei einer ersten einfachen Aufgabe betrachten wir eine bestimmte Zusammenstellung sämtlicher n Elemente der Ausgangsmenge. Darin soll jedes Element nur einmal auftreten. Eine solche Zusammenstellung wird eine *Permutation* genannt.

In wieviel verschiedenen Reihenfolgen lassen sich nun diese Elemente anordnen? So können beispielsweise 6 Personen in einer Warteschlange stehen. Auf wie viele Arten ist das möglich?

Wir kommen zu einer weiteren Aufgabe, wenn in einer solchen Zusammenstellung nicht alle Elemente voneinander verschieden sind. In der erwähnten Warteschlange befinden sich 2 Männer und 4 Frauen. Unterscheidet man die Warteschlange nur nach dem Standort der Männer und Frauen, so gibt es sicher weniger unterschiedliche Reihenfolgen. Wir sprechen von *Permutationen mit Wiederholung.*

So bilden $a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5\, a_6$ und $a_4\, a_3\, a_2\, a_1\, a_5\, a_6$ zwei verschiedene Reihenfolgen der 6 Personen a_i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Sind a_1 und a_4 Männer und die anderen Frauen, so unterscheiden sich die beiden Zusammenstellungen bei der ausschließlichen Beachtung dieses Merkmals nicht mehr. In beiden Fällen entsteht $a_m\, a_f\, a_f\, a_m\, a_f\, a_f$.

Eine andere kombinatorische Aufgabe erhalten wir, wenn wir aus den n Elementen für k verschiedene Positionen je eines auswählen und dabei nach der Anzahl der entstehenden möglichen Zusammenstellungen fragen. Anders ausgedrückt, es wird nach der Anzahl der möglichen Zusammenstellungen zu je k von n Elementen gefragt.

Dabei kann die Berücksichtigung der Anordnung der Elemente von Bedeutung sein. Es soll z. B. unter fünf Fußballspielern der „Fußballer des Jahres" ausgewählt werden. Wie viele Möglichkeiten gibt es für die richtige Reihenfolge der drei Erstplazierten? Derartige Zusammenstellungen heißen *Variationen.*

Andererseits gibt es auch Zusammenstellungen, wo die Anordnung der ausgewählten Elemente nicht berücksichtigt zu werden braucht. Diese Zusammenstellungen heißen *Kombinationen.* Für einen Skatspieler ist die Anordnung seiner 10 Karten ohne Bedeutung für das Spiel.

In beiden Fällen können in den Zusammenstellungen die Elemente auch mehrfach vorkommen. Ein Tipschein des Fußballtotos mit 12 möglichen Tips muß wenigstens