Beispiel 7.18: Wir betrachten in einer Ebene ein rechtwinkliges x,y-Koordinatensystem (Bild 7.8). Die Punkte P in der Ebene lassen sich dann eindeutig durch je ein geordnetes Paar (a, b) charakterisieren. Es ist allgemein bekannt, daß der Punkt $P = (a, b)$ vom Punkt $Q = (b, a)$ für $a \neq b$ verschieden ist.

Die Punkte im 3-dimensionalen Raum werden dagegen eindeutig durch ein 3-Tupel (Tripel) charakterisiert. (Weitere Beispiele siehe 7.6. und 7.9.)

7.5.2. Produktmengen

Im folgenden wollen wir geordnete Paare, die aus Elementen gewisser Mengen A, B gebildet werden, zu Mengen zusammenfassen und diese speziell bezeichnen.

Definition 7.16 *(Produktmengen): A und B seien zwei Mengen. Dann heißt* **D.7.16**

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\} \tag{7.29}$$

Produktmenge *der Mengen A, B (auch genannt:* **Kreuzmenge, kartesisches Produkt).**

Die Menge $A \times B$ ist eine Menge geordneter Paare, enthält also Mengen zweiter Stufe als Elemente und ist deshalb selbst eine Menge dritter Stufe.

Beispiel 7.19:

(1) $A = \{a_1, a_2\}$, $\quad B = \{0, 2, 4\}$,
$A \times B = \{(a_1, 0), (a_1, 2), (a_1, 4), (a_2, 0), (a_2, 2), (a_2, 4)\}$.

(2) $A = \{p =$ „3 ist eine Primzahl“, $q =$ „10 ist durch 4 teilbar“$\}$, $B = \{W, F\}$,
$A \times B = \{$(„3 ist eine Primzahl“, W), („3 ist eine Primzahl“, F)
(„10 ist durch 4 teilbar“, W), („10 ist durch 4 teilbar“, F).

(3) $A = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2} 2\right\}$, $\quad B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Die Elemente von $A \times B$ lassen sich also als Punktmenge gemäß Bild 7.9 darstellen.

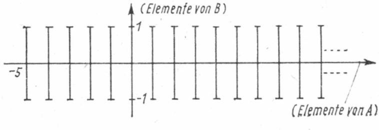

Bild 7.10.
Darstellung von $A \times B$

(4) $A = \{a \mid a \in \mathbf{G} \wedge a > -5\}$, $\quad B = \{b \mid b \in \mathbf{R} \wedge -1 \leqq b \leqq +1\}$,
Darstellung von $A \times B = \{(a, b) \mid (a \in \mathbf{G} \wedge a > -5) \wedge (b \in \mathbf{R} \wedge -1 \leqq b \leqq 1)\}$ in Bild 7.10.

Einige Rechenregeln für die Produktmenge wollen wir im Satz 7.6 zusammenstellen:

Satz 7.6: *Für beliebige Mengen A, B, C gilt:* **S.7.6**

(1) $A \neq B \rightarrow A \times B \neq B \times A$ *(nichtkommutativ)*;   (7.30)
(2) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$ *(Distributivgesetze)*;   (7.31)
(3) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$ *(Distributivgesetze)*.   (7.32)