durch $x + y \in X$, *zuordnet. Dabei genügen diese Addition und die Multiplikation mit einer Zahl den folgenden Gesetzen:*

$$(1)\ x + y = y + x, \tag{7.34}$$
$$(2)\ x + (y + z) = (x + y) + z, \tag{7.35}$$
$$(3)\ a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y, \tag{7.36}$$
$$(4)\ (a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x, \tag{7.37}$$
$$(5)\ a \cdot (b \cdot x) = (a \cdot b) \cdot x, \tag{7.38}$$
$$(6)\ 1 \cdot x = x, \tag{7.39}$$
$$(7)\ (x + y = x + z) \rightarrow y = z, \tag{7.40}$$

und es wird ein Nullelement o *durch* $0 \cdot x = o$ *definiert, welches die Bedingung* $x + o = x$ *erfüllt und weitere aus* (7.34) *bis* (7.40) *herleitbare Eigenschaften besitzt.*

Nach dieser Definition folgt, daß mit zwei beliebigen Elementen x, y eines linearen Raumes X und zwei beliebigen Zahlen auch das Element $a \cdot x + b \cdot y$, welches wir *Linearkombination* von x und y nennen, zum Raum X gehört.

Beispiel 7.21: Es sei $X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (i \in \{1, 2, \ldots, n\}) \wedge (\forall i)\, x_i \in \mathbf{R}\}$ die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen, d. h. $X = \mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$, wobei wir im folgenden zur Abkürzung für $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \ldots \times \mathbf{R}$ das Symbol R^n schreiben wollen. Wir definieren:

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &= (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \in R^n, \end{aligned} \tag{7.41}$$

$$a \cdot x = a \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (a \cdot x_1, a \cdot x_2, \ldots, a \cdot x_n) \in R^n. \tag{7.42}$$

Man kann leicht zeigen, daß die Eigenschaften (1) bis (7) gelten,

z. B. (4): $$\begin{aligned} (a + b) \cdot x &= ((a + b) \cdot x_1, (a + b) \cdot x_2, \ldots, (a + b) \cdot x_n) \\ &= (a \cdot x_1 + b \cdot x_1, \ldots, a \cdot x_n + b \cdot x_n) = (a \cdot x_1, \ldots, a \cdot x_n) \\ &\quad + (b \cdot x_1, \ldots, b \cdot x_n) \\ &= a \cdot (x_1, \ldots, x_n) + b \cdot (x_1, \ldots, x_n) = a \cdot x + b \cdot x. \end{aligned}$$

Das Nullelement o ergibt sich zu

$$o = 0 \cdot x = 0 \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0 \cdot x_1, 0 \cdot x_2, \ldots, 0 \cdot x_n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Demzufolge bildet die Menge R^n mit den Definitionen (7.41) und (7.42) einen linearen Raum, den sogenannten *n-dimensionalen, reellen, euklidischen Raum* (siehe auch 7.8.), der bei Interpretation der n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ als Vektoren auch *Vektorraum* genannt wird.

7.8. Metriken in Mengen (metrischer Raum, Umgebungsbegriff)

Wir betrachten wieder eine Menge X.

D.7.20 **Definition 7.20:** *Ein* **Abstand** *auf* X *ist dann definiert, wenn jedem Element* (x, y) *aus* $X \times X$ *in eindeutiger Weise eine reelle Zahl* d, *bezeichnet mit* $d(x, y)$, *zugeordnet*