Differential- und Integralrechnung für Funktionen mit einer Variablen

11. Januar 2024

Vorwort

Dem vorliegenden Band 2 dieser Lehrbuchreihe kommt ebenso wie dem Band 1 insofern eine besondere Bedeutung innerhalb des gesamten Lehrwerkes zu, als nahezu alle anderen Bände darauf auf bauen.

Ein Teil der in diesem Buch behandelten Gegenstände ist auch im Lehrplan unserer Oberschulen enthalten. Ein Weglassen des dort bereits Dargebotenen hätte aber zu einer unzusammenhängenden Darstellung des Gebietes geführt; außerdem wäre nicht gewährleistet, daß alle Leser mit den gleichen Voraussetzungen die weiteren Bände studieren können.

Eine korrekte Anwendung mathematischer Methoden setzt die genaue Kenntnis der zugrunde liegenden Begriffe voraus. Es muß dem Leser daher dringend nahegelegt werden, sich um ein volles Verständnis der eingeführten Begriffe zu bemühen. Anhand von vielen Beispielen wird gezeigt, wie mathematische Begriffe in den Anwendungen zu interpretieren sind. Ein gründliches Studium des Textes und das selbständige Lösen der über 100 Übungsaufgaben sollte den Leser in die Lage versetzen, die spezifische Anwendbarkeit der behandelten Begriffe und Methoden in seinem Fachgebiet selbst zu erkennen.

Im Interesse einer straffen Darstellung mußte auf eine Reihe von Beweisen verzichtet werden. Alle Aussagen werden aber erläutert und - soweit möglich - geometrisch interpretiert.

Für wertvolle Hinweise danken wir vor allem dem Herausgeber, Herrn Prof. Dr. O. Greuel (Mittweida), den Gutachtern, Herrn Prof. Dr. W. Dück (Berlin) und Herrn Prof. Dr. H. Goering (Magdeburg), sowie Herrn Prof. Dr. G. Opitz (Dresden). Besonderer Dank gebührt Frau I. Kamenz für das sorgfältige Schreiben des Manuskripts. Dem Verlag sei für die gute Zusammenarbeit herzlich gedankt.

Dresden, Januar 1973

E. A. Pforr

W. Schirotzek

Vorwort zur 6. Auflage

In dieser Auflage wurden gegenüber der vorangegangenen an zwei Stellen inhaltliche Veränderungen größeren Umfangs vorgenommen. Im Hinblick auf den Einsatz von elektronischen Rechnern, insbesondere auch von Taschenrechnern, war die Darstellung der Näherungsverfahren (Abschnitt 7.7.) zu überarbeiten. Der algorithmische Aspekt wurde stärker herausgearbeitet, auf die Formulierung von Algorithmen in einer Programmiersprache jedoch verzichtet. Außerdem wurde der Abschnitt über elliptische Integrale (9.3.5.) erweitert.

Für die wertvolle Unterstützung bei der Überarbeitung von Abschnitt 7.7. sei Herrn Dr. sc. nat. S. Dietze (Dresden) herzlich gedankt.

Dresden, Juli 1985

E. A. Pforr

W. Schirotzek

Inhaltsverzeichnis

Teil I.

Differentialrechnung

1. Problemstellung und Historisches

Zur mathematischen Beschreibung von Naturvorgängen, aber auch von technischen und ökonomischen Prozessen ist die Differentialrechnung ein unentbehrliches Hilfsmittel. Es ist daher nicht verwunderlich, daß gerade von Naturforschern entscheidende Anstöße zu ihrer Entwicklung ausgingen. Wichtige Vorarbeiten wurden im 16. und 17. Jahrhundert geleistet. Die eigentlichen Urheber dieser Disziplin sind aber Isaac Newton (1643-1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), die die Differential- (und Integral-) Rechnung etwa gleichzeitig und voneinander unabhängig zu einem Kalkül entwickelten. Newton schuf seine „Fluxionsrechnung" bei der Ableitung des Gravitationsgesetzes aus den Keplerschen Gesetzen der Planetenbewegung. Leibniz, der auch das Symbol $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ einführte, ging von dem Problem aus, an eine Kurve in einem vorgegebenen Kurvenpunkt die Tangente zu legen („Tangentenproblem"). Die Arbeiten dieser genialen Forscher lösten eine außerordentlich rasche Entwicklung der Mathematik aus, die ihrerseits in hohem Maße befruchtend auf andere Wissenschaften wirkte. Entscheidenden Anteil an dieser Entwicklung hatten die Brüder Jakob und Johann Bernoulli (1654-1705 bzw. 1667-1748), auf deren Vorlesungen auch das erste, 1696 erschienene Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung des Marquis de l'Hospital (1661-1704) basiert.

Wie wir noch sehen werden, beruht die Differentialrechnung, ebenso wie die Integralrechnung, auf dem Begriff des *Grenzwertes*. Zeitlich ging jedoch die kalkülmäßige Entwicklung der Differential- und Integralrechnung der strengen Begriffsdefinition voran. Daraus entstanden immer häufiger Schwierigkeiten und Unstimmigkeiten, die sich zunächst nicht überwinden ließen. Schließlich führte Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) den Grenzwertbegriff in die Mathematik ein. Doch erst Bernard Bolzano (1781-1848) und Augustin Louis Cauchy (1789-1857) wendeten diesen Begriff konsequent an und stellten damit die Infinitesimalrechnung (zu der man neben der Differential- und Integralrechnung auch die Theorie der unendlichen Reihen zählt) auf ein solides Fundament.

Vor einem Aufbau der Differentialrechnung ist also der Grenzwertbegriff für Funktionen zu behandeln. Zwangsläufig wird man damit zum Begriff der *Stetigkeit* geführt. Die eigentliche Differentialrechnung beginnt mit der Definition der *Ableitung* einer Funktion.

Alle drei Begriffe werden zur exakten Beschreibung bestimmter Sachverhalte in den unterschiedlichsten Gebieten herangezogen. So kann man mit dem Grenzwertbegriff z. B. das Verhalten einer zeitabhängigen Größe, „ nach sehr langer Zeit charakterisieren, mit dem Begriff der Stetigkeit bzw. Unstetigkeit den „kontinuierlichen“ bzw. „sprunghaften“ Ablauf eines Vorgangs erfassen und mit der Ableitung die „Änderungsgeschwindigkeitëines Prożesses beschreiben.

Die mathematischen Möglichkeiten reichen jedoch über die unmittelbare Anwendbarkeit dieser Begriffe weit hinaus. So werden wir unter Verwendung der Differentialrechnung u. a. Näherungsformeln für (nichtrationale) Funktionen herleiten, Methoden zur Ermittlung von Extremwerten angeben und Verfahren zur numerischen Lösung von Gleichungen behandeln. Dem „Praktiker"werden damit Hilfsmittel zur Verfügung gestellt, auf die er fortlaufend zurückgreifen muß.

2. Grenzwerte

2.1. Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$

2.1.1. Definition des Grenzwertes einer Funktion für $x \to x_0$

Im folgenden bedeutet „Funktion“ stets „reellwertige Funktion einer reellen Variablen“.

Als Vorbereitung auf den Grenzwertbegriff für Funktionen behandeln wir das

Beispiel 2.1: An die Parabel $y = x^2$ werde die Sekante durch den festen Kurvenpunkt $P_0\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ und den variablen Kurvenpunkt $P\left(x, x^2\right)$ gelegt (s. Bild 2.1). Der Anstieg der Sekante ist eine Funktion f von x :

$$f(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} \quad \left(x \neq \frac{1}{2}\right) \tag{2.1}$$

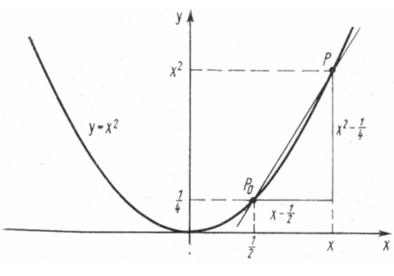

Bild 2.1.

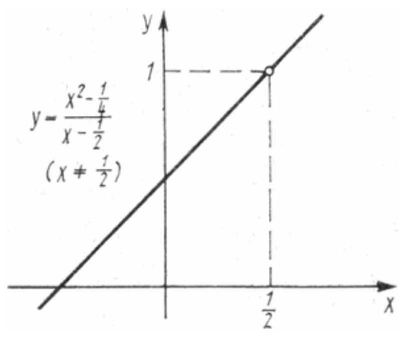

Bild 2.2.

Auf Grund der Anschauung wird man vermuten, daß bei „Annäherung“ von x an die Stelle $\frac{1}{2}$ die Sekante in eine gewisse „Grenzlage“ übergeht, also auch ihr Anstieg (2.1) einen gewissen „Grenzwert“ annimmt. Betrachten wir also die Funktion f. An der Stelle $x = \frac{1}{2}$ ist f nicht definiert. Für $x \neq \frac{1}{2}$ gilt

$$f(x) = \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} = x + \frac{1}{2} \quad \left(x \neq \frac{1}{2}\right). \tag{2.2}$$

Die Bildkurve von f ist in Bild 2.2 dargestellt [1]. Die Anschauung legt jetzt etwa die folgende Formulierung nahe: „Für x gegen $\frac{1}{2}$ strebt $f(x)$ gegen 1.“

Unsere Aufgabe wird es nun sein, einer solchen Formulierung einen von der Anschauung unabhängigen, wohldefinierten Sinn zu geben.

Soll allgemein das Verhalten einer Funktion f bei „Annäherung“ der unabhängigen Variablen x an eine reelle Zahl x_0 untersucht werden, so ist es naheliegend, die Variable x Zahlenfolgen (x_n) mit folgenden Eigenschaften durchlaufen zu lassen:

(E 1) $x_n \in D(f)$[2] für alle n $\quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$,

(E 2) $x_n \neq x_0$ für alle n,

(E 3) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0$.

Die Eigenschaft (E2) bedeutet, daß das Verhalten von f an der Stelle x_0 selbst nicht in Betracht gezogen wird. Daher braucht f auch nur in einer sog. *punktierten Umgebung* von x_0 definiert zu sein. Das ist, mit einem $c > 0$, die Menge aller x mit

$$x_0 - c < x < x_0 + c \text{ und } x \neq x_0 \qquad \text{(s. Bild 2.3).}$$

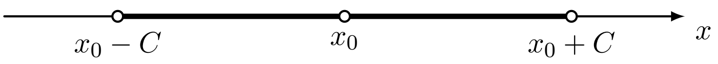

Bild 2.3.

Das Verhalten von f in einer punktierten Umgebung von x_0 wird nun durch das Verhalten der Folge der Funktionswerte $f(x_n)$ charakterisiert.

Definition 2.1: Die Funktion f sei (mindestens) in einer punktierten Umgebung von x_0 definiert. Eine Zahl g heißt **Grenzwert von f für x gegen x_0**, in Zeichen

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g \text{ oder } f(x) \to g \text{ für } x \to x_0,$$

[1] In Bild 2.2 soll der kleine Kreis um den Punkt $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ andeuten, daß dieser Punkt nicht zur Bildkurve von f gehört. Analog wird in den folgenden Beispielen verfahren.

[2] $D(f)$ bezeichnet den Definitionsbereich von f.

wenn für je de Folge (x_n) mit den Eigenschaften (E1), (E2), (E3) die Folge $(f(x_n))$ gegen g konvergiert.

Damit ist der Begriff des Grenzwertes einer Funktion auf den Grenzwertbegriff für Zahlenfolgen zurückgeführt.

In Bild 2.4 haben wir die ersten drei Glieder einer Folge (x_n) und der zugehörigen Folge $(f(x_n))$ eingezeichnet.

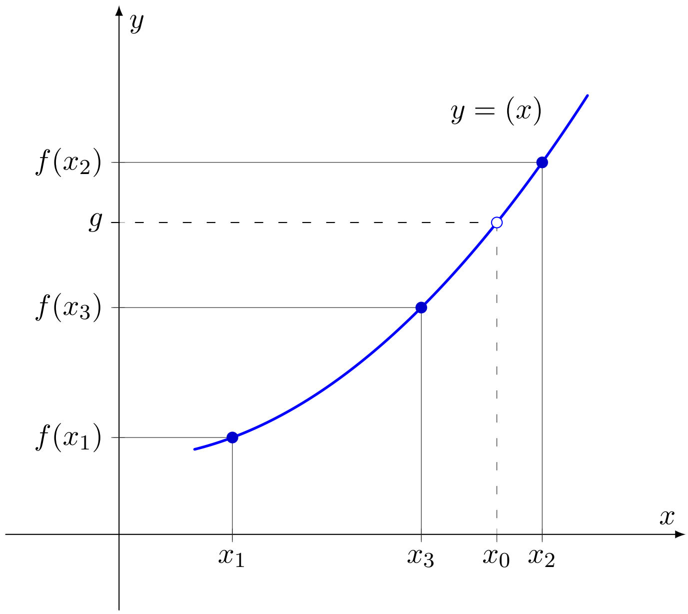

Bild 2.4.

Beispiel 2.2: Gesucht ist der Grenzwert der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} \text{ für } x \to \frac{1}{2}.$$

Es sei (x_n) eine beliebige Folge mit

$$x_n \neq \frac{1}{2} \text{ für alle } n \text{ und } \lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}. \tag{2.3}$$

Unter Verwendung von (2.2) und bekannten Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} f\left(x_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(x_n + \frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1. \tag{2.4}$$

Die Gültigkeit von (2.4) wurde für eine beliebige und damit für jede Folge (x_n) mit den Eigenschaften (2.3) bewiesen. Daher gilt

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} = 1$$

was in Einklang mit der Anschauung steht (Bild 2.2).

Beispiel 2.3: Wir wollen den Grenzwert der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - \frac{1}{4}}{x - \frac{1}{2}} & \text{für} \quad x \neq \dfrac{1}{2}, \\ 2 & \text{für} \quad x = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

für $x \to \dfrac{1}{2}$ ermitteln (s. Bild 2.5).

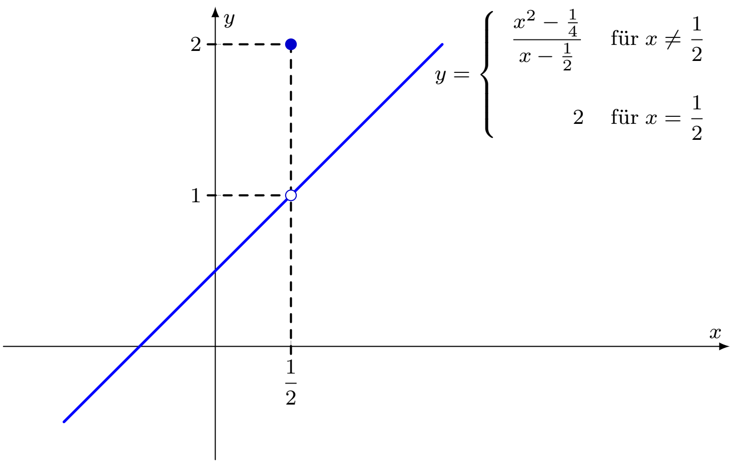

Bild 2.5.

Obwohl f an der Stelle $x = \dfrac{1}{2}$ definiert ist, werden auch hier nur Folgen (x_n) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$ betrachtet, für die $x_n \neq \dfrac{1}{2}$ für alle n gilt **[vgl. (E 2)]**. Für jede solche Folge erhält man wie in Beispiel 2.2

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - \frac{1}{4}}{x_n - \frac{1}{2}} = \lim_{n\to\infty} \left(x_n + \frac{1}{2}\right) = 1,$$

also ist

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = 1.$$

* Aufgabe 2.1

Ermitteln Sie die folgenden Grenzwerte:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{3x+2}{x-1}$,

b) $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2-4}{x+2}$.

Beispiel 2.4: Nun soll das Verhalten von $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}(x \neq 0)$ für $x \to 0$ untersucht werden. Die Bildkurve von f (Bild 2.6) schwankt für $x \to 0$ ständig zwischen -1 und 1 , wobei die Scheitel immer dichter aufeinander folgen. Wir wollen zeigen, daß f für $x \to 0$ keinen Grenzwert hat. Dazu genügt es, eine Folge (x_n) mit

$$x_n \neq 0 \text{ für alle } n \text{ und } \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \tag{2.5}$$

anzugeben, für die die Folge $(f(x_n))$ divergent ist. Setzen wir zum Beispiel $x_n = \dfrac{2}{(2n-1)\pi}$, dann gilt (2.5), aber wegen

$$f(x_n) = \sin(n\pi - \pi/2) = (-1)^{n+1}$$

ist die Folge $(f(x_n))$ (unbestimmt) divergent.

Man kann den Beweis auch dadurch führen, daß man zwei Folgen (x_n) und $(\tilde{x}_n)$ mit den Eigenschaften (2.5) angibt, für die die Folgen $(f(x_n))$ und $(f(\tilde{x}_n))$ verschiedene Grenzwerte haben.

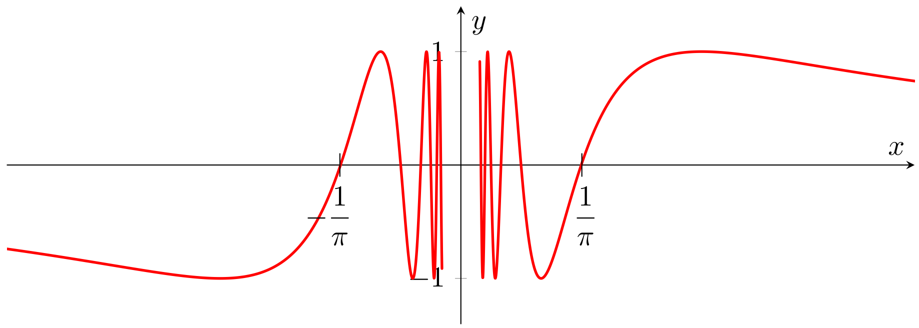

Bild 2.6.

*** Aufgabe 2.2**

Führen Sie den Beweis in der soeben angedeuteten Weise durch!

Beispiel 2.5: Abschließend betrachten wir noch die Funktion

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}} \quad (x > -1, x \neq 0) \text{ für } x \to 0.$$

Für die Folge (x_n) mit $x_n = \dfrac{1}{n}$ gilt (vgl. Band 1, Abschnitt 10.7.)

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \mathrm{e}. \tag{2.6}$$

Ohne Beweis [3] sei mitgeteilt, daß (2.6) sogar für jede Folge (x_n) mit $x_n > -1, x_n \neq 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ gilt. Damit erhält man den für spätere Anwendungen wichtigen Grenzwert

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e} \tag{2.7}$$

2.1.2. Die „$\varepsilon - \delta$-Charakterisierung“ des Grenzwertes

Auf Grund der Anschauung wird man vermuten, daß man die Gleichung $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = g$ auch folgendermaßen interpretieren kann:

„Der Abstand zwischen $f(x)$ und g (also $|f(x)-g|$) ist beliebig klein, wenn nur der Abstand zwischen x und x_0 hinreichend klein, aber von null verschieden ist.“ In geeigneter Präzisierung ist das der Inhalt des folgenden Satzes, den wir ohne Beweis angeben.

Satz 2.1: Die Funktion f sei (mindestens) in einer punktierten Umgebung der Stelle x_0 definiert. Genau dann gilt $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, wenn zu jeder (insbesondere jeder beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ existiert, so daß gilt **S.2.1**

$$|f(x) - g| < \varepsilon \tag{2.8}$$

für alle x mit

$$0 < |x - x_0| < \delta \tag{2.9}$$

Eine geometrische Deutung dieses Satzes gibt Bild 2.7. Mit den dort verwendeten Bezeichnungen bedeutet $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = g$, daß zu jedem (noch so schmalen) „E-Streifen“

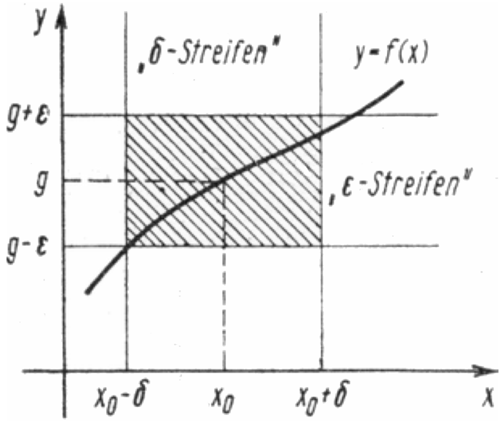

Bild 2.7.

um $y = g$ ein „δ-Streifenüm $x = x_0$ existiert, so daß alle Punkte der Bildkurve von f, die in diesem „δ-Streifen“ - außer auf der Mittellinie $x = x_0$[4] - liegen, auch dem vorgegebenen „ε-Streifen“ängehören. Dabei ist offenbar δ im allgemeinen um so kleiner zu wählen, je kleiner ε vorgegeben ist. Diesen Sachverhalt soll die Schreibweise $\delta = \delta(\varepsilon)$ zum Ausdruck bringen.

Beispiel 2.6: Als Anwendung des Satzes wollen wir zeigen, daß

$$\lim_{x \to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0} \quad (x_0 > 0) \tag{2.10}$$

[3]Beweise zu Teil 1 dieses Buches findet man, wenn nichts anderes gesagt ist, in [5] und [10].
[4]Man beachte, daß $|x - x_0| > 0$ äquivalent zu $x \neq x_0$ ist.

gilt (Bild 2.8). Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gegeben. Gemäß (2.8) ist $\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right|$ abzuschätzen. Wir erweitern mit $\sqrt{x} + \sqrt{x_0}$ und erhalten

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \leqq \frac{1}{\sqrt{x_0}}\,|x - x_0| < \varepsilon \tag{2.11}$$

für alle $x \geqq 0$ mit $|x - x_0| < \sqrt{x_0}\varepsilon$. Daher setzen wir δ gleich der kleineren der beiden Zahlen x_0 und $\sqrt{x_0}\varepsilon$. Für alle x mit $|x - x_0| < \delta$ gilt dann $x \geqq 0$ (warum?) und (2.11).

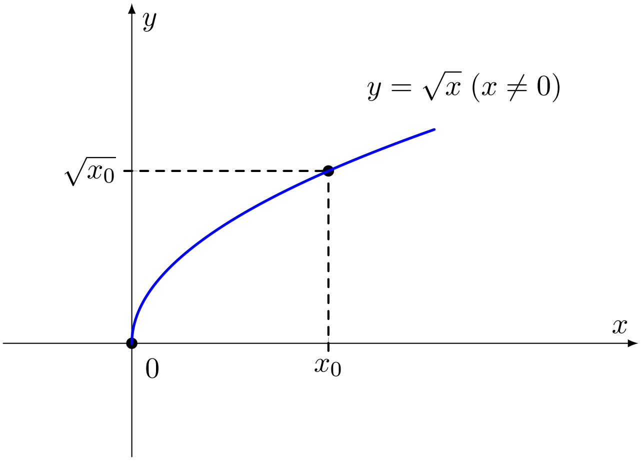

Bild 2.8.

2.2. Einseitige Grenzwerte

Für die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x}$ ist die Voraussetzung $x_0 > 0$ wesentlich (s. (2.10)), denn für $x_0 \leqq 0$ gibt es keine punktierte Umgebung von x_0, in der die Funktion $f(x) = \sqrt{x} (x \geqq 0)$ definiert ist. Im Falle $x_0 \leqq 0$ existiert $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt{x}$ also nicht. Der Stelle $x_0 = 0$ kann man sich aber immerhin noch „von rechts nähern“, ohne den Definitionsbereich von f zu verlassen. Diese Überlegung führt zum Begriff der einseitigen Grenzwerte.

Definition 2.2: **D.2.2**

Die Funktion f sei (mindestens) in einem Intervall $(x_0, x_0 + c)$[5] $(c > 0)$ definiert. Eine Zahl g_{r} heißt rechtsseitiger Grenzwert von $\boldsymbol{f}$ für $\boldsymbol{x}$ gegen $\boldsymbol{x}_0$, in Zeichen

[5] Ein solches Intervall nennt man auch punktierte rechtsseitige Umgebung von x_0.

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = g_\mathrm{r} \quad \text{oder } f(x) \to g_\mathrm{r} \quad \text{für} \quad x \to x_0 + 0)^{6},$$

wenn für jede Folge (x_n) mit den Eigenschaften

(E 1) $x_n \in D(f)$ für alle n,

(E 2*) $x_n > x_0$ für alle n,

(E 3) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$

die Folge $(f(x_n))$ gegen g_r konvergiert (s. Bild 2.9).

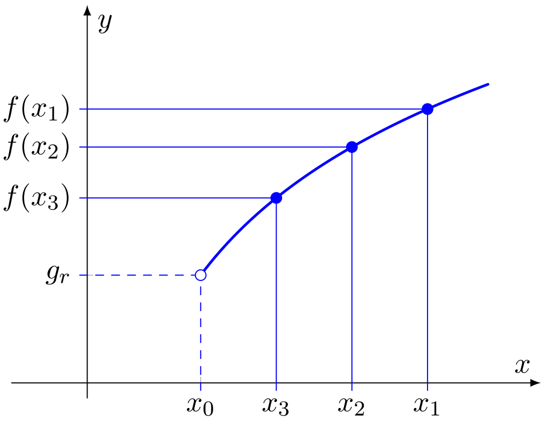

Bild 2.9.

Analog definiert man den **linksseitigen Grenzwert g_1 von f für x gegen x_0**, in Zeichen

$$\lim_{x \to x_0-0} f(x) = g_1 \text{ oder } f(x) \to g_1 \text{ für } x \to x_0 - 0^{7}.$$

Beispiel 2.7:

Es gilt (s. Bild 2.8)

$$\lim_{x \to +0} \sqrt{x} = 0 \tag{2.12}$$

[6] Statt $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = g_r$ (bzw. $f(x) \to g_r$, für $x \to 0+0$) schreibt man kurz $\lim\limits_{x\to +0} f(x) = g_r$ (bzw. $f(x) \to g_r$ für $x \to +0$).

[7] Vgl. 6

denn für jede Folge (x_n) mit $x_n > 0$ für alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{x_n} = 0$ (s. Band 1, Abschnitt 10.5.).

Das folgende Beispiel zeigt, daß der Begriff des einseitigen Grenzwertes auch für Funktionen von Bedeutung ist, die in einer (punktierten) Umgebung von x_0 definiert sind.

Beispiel 2.8: Es soll das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x} & \text{für } 0 < x \leqq 3, \\ x - 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

bei „Annäherung“ an die Stelle $x_0 = 3$ untersucht werden (s. Bild 2.10). Ist (x_n) eine beliebige Folge mit $0 < x_n < 3$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 3$, dann gilt

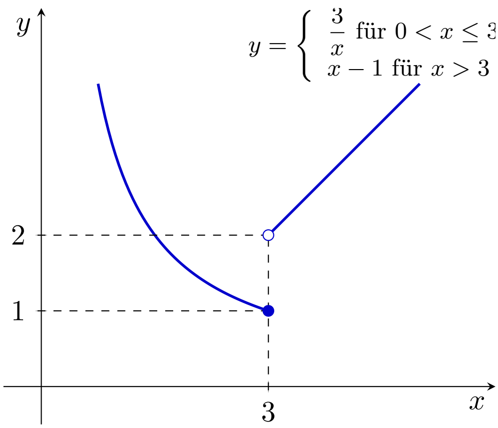

Bild 2.10.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} 3}{\lim_{n\to\infty} x_n} = 1$$

Daher ist $\lim\limits_{x\to 3-0} f(x) = 1$. Analog erhält man $\lim\limits_{x\to 3+0} f(x) = 2$.

Über den Zusammenhang zwischen den einseitigen Grenzwerten und dem Grenzwert (schlechthin) gilt der folgende Satz.

Satz 2.2:

Die Funktion f hat genau dann für x gegen x_0 einen Grenzwert, wenn die einseitigen Grenzwerte von f für x gegen x_0 existieren und übereinstimmen. **S.2.2**

In diesem Falle gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x).$$

Nach diesem Satz hat also die in Beispiel 2.8 betrachtete Funktion f wegen $\lim\limits_{x \to 3-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3+0} f(x)$ für $x \to 3$ keinen Grenzwert.

*** Aufgabe 2.3**

Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion

$$f(x) = \frac{|x|}{x} (x \neq 0) \text{ für } x \to +0, x \to -0 \text{ und } x \to 0.$$

2.3. Grenzwert einer Funktion für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$

Zur Charakterisierung des Verhaltens einer Funktion bei unbegrenztem Zunehmen oder Abnehmen der unabhängigen Variablen geben wir die folgende

Definition 2.3: *Die Funktion f sei (mindestens)* in einem Intervall $(a, +\infty)$ definiert. Eine Zahl g heißt **Grenzwert von f für x gegen** $+\infty$, in Zeichen **D.2.3**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g \text{ oder } f(x) \to g \text{ für } x \to +\infty,$$

wenn für je de Folge (x_n) in $D(f)$ mit $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$ die Folge $(f(x_n))$ gegen g konvergiert.

Geometrisch bedeutet $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = g$, daß sich die Bildkurve von f mit wachsendem x immer mehr der Geraden $y = g$ annähert. Dabei braucht f nicht monoton zu sein (s. Bild 2.11).

Analog definiert man

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = g.$$

Im Zusammenhang mit den folgenden Beispielen sei an die Bildkurven der jeweiligen Funktion erinnert.

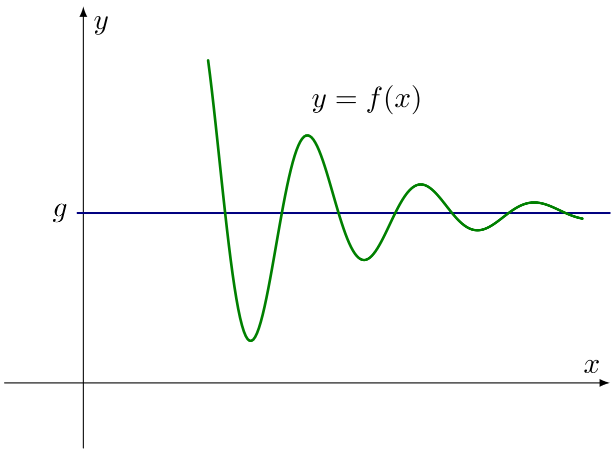

Bild 2.11.

Beispiel 2.9: Es gilt

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^k} = 0 \quad (k > 0, \text{ ganz }), \tag{2.13}$$

denn ist (x_n) irgendeine gegen $+\infty$ oder $-\infty$ bestimmt divergente Folge mit $x_n \neq 0$ für alle n, dann ist, wie man zeigen kann, auch die Folge $\left(x_n^k\right)_{n=1,2,\ldots}$ bestimmt divergent und daher die Folge $\left(\frac{1}{x_n^k}\right)_{n=1,2,\ldots}$ eine Nullfolge (s. Bild 2.12 für $k = 2$).

Beispiel 2.10: Wir wollen die Grenzwertaussage

$$\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad (a > 1) \tag{2.14}$$

beweisen. Es sei also (x_n) eine beliebige Folge mit $\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(\varepsilon)$, so daß gilt

$$x_n < \log_a \varepsilon \text{ für alle } n \geqq n_0.$$

Da die Funktion $f(x) = a^x (a > 1)$ streng monoton wachsend ist, folgt

$$|a^{x_n} - 0| = a^{x_n} < \varepsilon \text{ für alle } n \geqq n_0.$$

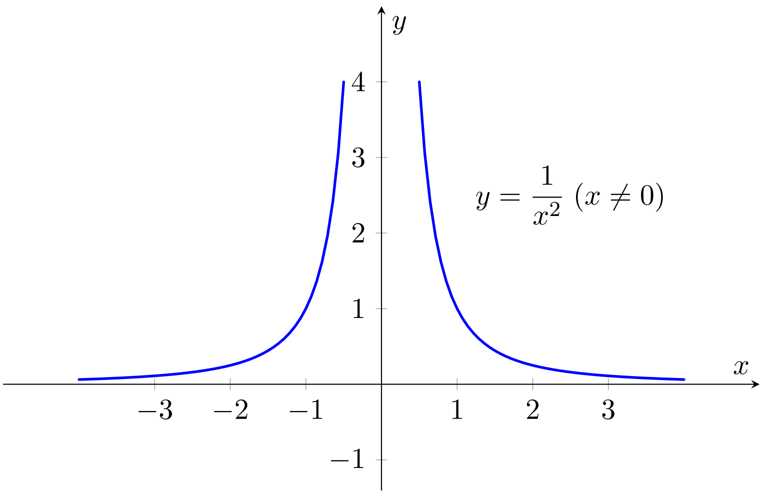

Bild 2.12.

Folglich ist $\lim\limits_{n\to\infty} a^{x_n} = 0$. Da die Folge (x_n) beliebig war, ist die Behauptung bewiesen. Ersetzt man x durch $-x$, so geht (2.14) über in

$$\lim_{x\to+\infty} a^{-x} = 0 \quad (a > 1). \tag{2.15}$$

Ist x eine Variable für die Zeit, dann bedeutet die Existenz von $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = g$, daß sich die zeitabhängige Größe $y = f(x)$ mit zunehmender Zeit immer mehr dem stationären (d. h. zeitunabhängigen) Wert g nähert.

Beispiel 2.11:

Die Geschwindigkeit[8] v eines fallenden Körpers der Masse m ist unter der Annahme eines geschwindigkeitsproportionalen Luftwiderstands (Proportionalitätsfaktor $k > 0$) durch

$$v = \left(v_0 - \frac{m\,\mathrm{g}}{k}\right) \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{m\,\mathrm{g}}{k} \quad (t \geqq 0)$$

gegeben (t : Zeit, v_0 : Geschwindigkeit zur Zeit $t = 0$, g : Erdbeschleunigung). In der Lösung zu Aufgabe 2.4 wird gezeigt, daß gilt

$$\lim_{t\to+\infty} v = \frac{m\,\mathrm{g}}{k}, \tag{2.16}$$

[8] In 4.2.2. werden wir die Geschwindigkeit einer geradlinigen Bewegung exakt definieren.

d.h., nach hinreichend langer Zeit t hat die Geschwindigkeit v nahezu den konstanten Wert $\frac{m\,g}{k}$. In Bild 2.13 haben wir v als Funktion von t für den Fall $v_0 < \frac{m\,g}{k}$ dargestellt.

2.4. Bestimmte und unbestimmte Divergenz

Besitzt eine Funktion f für eine der „Bewegungen“

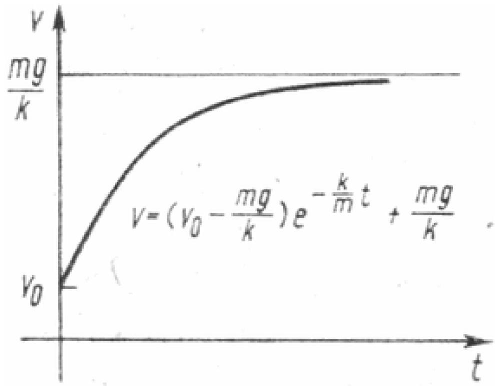

Bild 2.13.

HIERHIERHIERHIERHIER

$$x \to x_0; \quad x \to x_0 + 0, x \to x_0 - 0; \quad x \to +\infty, x \to -\infty \tag{2.17}$$

einen Grenzwert, dann heißt sie für diese „Bewegung“ konvergent, andernfalls divergent. Wie für Zahlenfolgen kann man auch für Funktionen zwei Arten der Divergenz unterscheiden.

Definition 2.4: Die Funktion f heißt bestimmt divergent gegen $+\infty$(bzw.$-\infty$) für eine der

„Bewegungen“ (2.17) der unabhängigen Variablen x, wenn für jede diese „Bewegung“ realisierende Folge [1]) (x_n) in $D(f)$ die Folge $(f\,(x_n))$ bestimmt divergent gegen $+\infty$(bzw. $-\infty$) ist.

Ist f für eine der „Bewegungen“ (2.17) weder konvergent noch bestimmt divergent, so heißt f für diese „Bewegung“ unbestimmt divergent. Ist f bestimmt divergent gegen $+\infty$ für $x \to x_0$, so schreibt man

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

und sagt auch, f habe für $x \to x_0$ den uneigentlichen Grenzwert $+\infty$. Analoge Schreibund Sprechweisen sind in den anderen Fällen bestimmter Divergenz üblich.

HIERHIERHIERHIERHIER

Beispiel 2.12: Es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

(s. Bild 2.12), denn in Band 1, Beispiel 10.11, wurde gezeigt, daß für jede Folge (x_n) mit $x_n \neq 0$ für alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ die Folge $\left(\frac{1}{x_n^2}\right)$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist. Beispiel 2.13: Es soll die Grenzwertaussage

$$\lim_{x\to +0} \ln x = -\infty$$

bewiesen werden. Es sei (x_n) eine Nullfolge mit $x_n > 0$ für alle n. Zu jeder (insbeson[9]

dere beliebig großen) Zahl $K > 0$ existiert dann eine natürliche Zahl $n_0 = n_0(K)$, so daß gilt also

$$\begin{aligned} x_n = |x_n - 0| < \mathrm{e}^{-K} \quad & \text{für alle } n \geqq n_0, \\ \ln x_n < -K \quad & \text{für alle } n \geqq n_0. \end{aligned}$$

Daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \ln x_n = -\infty$, und die Behauptung ist bewiesen. Beispiel 2.14: Die Funktion $f(x) = \sin x$ ist für $x \to +\infty$ unbestimmt divergent. Zum Beweis dieser Behauptung betrachten wir die Folge (x_n) mit $x_n = n\pi - \frac{\pi}{2}(n = 1, 2, \ldots)$: Offenbar gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$, aber wegen $f(x_n) = (-1)^{n+1}$ ist die Folge $(f(x_n))$ unbestimmt divergent. Ganz entsprechend hatten wir bereits in Beispiel 2.4 gezeigt, daß die Funktion $f(x) = \sin \frac{1}{x}(x \neq 0\ )$ für $x \to 0$ unbestimmt divergent ist.

2.5. Grenzwertsätze In diesem Abschnitt werden einige Regeln für das Rechnen mit Grenzwerten von Funktionen angegeben. Da der Grenzwertbegriff für Funktionen auf den Grenzwertbegriff für Zahlenfolgen zurückgeführt wurde, kann man diese Regeln leicht aus den entsprechenden Grenzwertsätzen für Zahlenfolgen ableiten. Wir verzichten auf eine Durchführung der Beweise.

Bemerkung 2.1: Die folgenden für die „Bewegung" $x \to x_0$ formulierten Sätze gelten singemä β^1) auch für die „Bewegungen"

$$x \to x_0 + 0, x \to x_0 - 0; \quad x \to +\infty, x \to -\infty.$$

[9]Man sagt z. B., die Folge (x_n) realisiere die "Bewegung" $x \to x_0 + 0$, wenn $x_n > x_0$ für alle n und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gilt.

Satz 2.3: Die Funktionen f_1 und f_2 seien für $x \to x_0$ konvergent mit S. 2.3

$$\lim_{x \to x_0} f_1(x) = g_1, \quad \lim_{x \to x_0} f_2(x) = g_2.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\lim_{x \to x_0} [f_1(x) + f_2(x)] = g_1 + g_2, \\
&\lim_{x \to x_0} [f_1(x) - f_2(x)] = g_1 - g_2, \\
&\lim_{x \to x_0} [cf_1(x)] = cg_1 \quad (c \text{ eine Konstante }), \\
&\lim_{x \to x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = g_1 \cdot g_2.
\end{aligned}$$

Ist außerdem $f_2(x) \neq 0$ für alle x einer punktierten Umgebung von x_0 und $g_2 \neq 0$, dann gilt auch

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{g_1}{g_2}.$$

1) Wird z. B. statt $x \to x_0$ die „Bewegung“ $x \to +\infty$ betrachtet, so ist in den folgenden Sätzen „punktierte Umgebung von x_0 "durch „Intervall $(a, +\infty)$ ßu ersetzen. Analog ist in den anderen Fällen zu verfahren.

Beispiel 2.15: Gesucht ist der Grenzwert

$$\lim_{x \to 2} x(3 - \sqrt{x})$$

Wegen $\lim\limits_{x \to 2} x = 2, \lim\limits_{x \to 2} 3 = 3, \lim\limits_{x \to 2} \sqrt{x} = \sqrt{2}$(vgl. (2.10)) folgt mit (2.21) und (2.19)

$$\lim_{x \to 2} x(3 - \sqrt{x}) = 2(3 - \sqrt{2}).$$

Beispiel 2.16: Es soll der Grenzwert

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 5x}{3x^2 - 4x + 1}$$

berechnet werden. Da$f_1(x) = 2x^2 + 5x$ (und auch $f_2(x) = 3x^2 - 4x + 1$) für $x \to -\infty$ divergent ist, kann man (2.22) nicht unmittelbar auf (2.23) anwenden. Wir formen daher zunächst um und erhalten dann unter Verwendung von Satz 2.3 und (2.13)

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^2 + 5x}{3x^2 - 4x + 1} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{5}{x}\right)}{x^2 \left(3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2 + \frac{5}{x}}{3 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} \\
&= \frac{2 + 0}{3 - 0 + 0} = \frac{2}{3}.
\end{aligned}$$

S. 2.4 Satz 2.4: Es sei

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0,$$

und für alle x einer punktierten Umgebung von x_0 gelte

$$f(x) > 0 \quad \text{bzw. } f(x) < 0.$$

Dann ist

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty \qquad \text{bzw.} \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty.$$

Beispiel 2.17: Die Abbildung durch einen sphärischen Hohlspiegel der Brennweite $f > 0$ wird bei Beschränkung auf Paraxialstrahlen durch die Gleichung

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = \frac{1}{f}$$

beschrieben. Dabei ist a bzw. a' die Gegenstands- bzw. Bildweite (s. Bild 2.14).

Aus dieser Gleichung ergibt sich a' als Funktion φ von a zu

$$a' = \varphi(a) = \frac{a \cdot f}{a - f} \quad (a > 0, a \neq f)^{1}\Big) .$$

Mit Satz 2.3 folgt unmittelbar

$$\lim_{a \to +0} \varphi(a) = \frac{0}{-f} = 0,$$
$$\lim_{a \to +\infty} \varphi(a) = \lim_{a \to +\infty} \frac{f}{1 - \frac{f}{a}} = \frac{f}{1 - 0} = f.$$

Ferner gilt

$$\lim_{a \to f+0} \frac{1}{\varphi(a)} = \lim_{a \to f+0} \frac{a - f}{a \cdot f} = \frac{0}{f^2} = 0$$

Ferner gilt

$$\lim_{a \to f+0} \frac{1}{\varphi(a)} = \lim_{a \to f+0} \frac{a - f}{a \cdot f} = \frac{0}{f^2} = 0,$$

und für alle $a > f$ ist $\dfrac{1}{\varphi(a)} > 0$. Daraus folgt nach Satz 2.4 unter Beachtung von Bemerkung 2.1 die Aussage $\lim\limits_{a \to f+0} \varphi(a) = +\infty$. Entsprechend findet man $\lim\limits_{a \to f-0} \varphi(a) = -\infty$. In Bild 2.15 ist die Funktion φ dargestellt. (Für $a > f$, also $a' > 0$, erhält man ein reelles Bild; für $0 < a < f$, also $a' < 0$, ein virtuelles Bild.)

Satz 2.5: Es sei S. 2.5

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = \lim_{x\to x_0} f_2(x) = g,$$

und für alle x einer punktierten Umgebung von x_0 gelte

$$f_1(x) \leqq f(x) \leqq f_2(x).$$

Dann gilt auch

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = g.$$

[1]) In diesem Beispiel bezeichnet f also eine Konstante und a die unabhängige Variable (der Funktion φ).

Beispiel 2.18: Mit Hilfe von Satz 2.5 wollen wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$$

berechnen. Aus Bild 2.16 liest man ab: Der Flächeninhalt des Dreiecks OP_1P_2 ist kleiner als der des Kreissektors OP_1P_2, und dieser ist kleiner als der des Dreiecks OP_1P_3, d. h., es gilt

$$\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x < \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot x < \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \tan x \text{ für } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Wegen $\sin x > 0$ für $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ und der ersten Ungleichung in (2.24) gilt

$$0 < \sin x < x \quad \text{für} \quad \left(x \in 0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$0 < \sin x < x \text{ für } \quad \left(x \in 0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Wegen $\lim\limits_{x\to+0} 0 = 0$, $\lim\limits_{x\to+0} x = 0$ folgt aus (2.25) durch sinngemäße Anwendung von Satz 2.5 auf die „Bewegung“"$x \to +0$

$$\lim_{x\to+0} \sin x = 0$$

und daraus

$$\lim_{x\to-0} \sin x = \lim_{x\to+0} \sin(-x) = -\lim_{x\to+0} \sin x = 0.$$

Wegen (2.26) und (2.27) gilt nach Satz 2.2

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0$$

und damit

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1$$

Multipliziert man die 2. Ungleichung in (2.24) mit $\dfrac{2}{\sin x}$ und bildet anschließend den Kehrwert, so erhält man für $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

Wegen $\cos(-x) = \cos x, \sin(-x) = -\sin x$ gilt (2.30) auch für $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, also in einer punktierten Umgebung von $x = 0$. Nach Satz 2.5 folgt daher aus (2.29) und (2.30) schließlich

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

* Aufgabe 2.4: Beweisen Sie die Formel (2.16).

* Aufgabe 2.5: Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte: a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x+2}{x^2-1}$, b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+2}{x^2-1}$,

c) $\lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{x^2-3x}{x^3+7} + \dfrac{4x^3-5}{2x^3+3x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2+3}{x+2}$ e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sin x}{x}$.
Aufgabe 2.6: Beweisen Sie: Ist f eine echt gebrochen rationale Funktion, so gilt $f(x) \to 0$ für $x \to +\infty$ und für $x \to -\infty$ (vgl. Aufgabe 2.5 b). 2.6. Die Landauschen Ordnungssymbole Zum Vergleich des Grenzverhaltens zweier Funktionen erweisen sich die Landauschen [1]) Ordnungssymbole o und O (lies „klein-o“ bzw. ‚groß-o“) als nützlich.

2.6. Die Landauschen Ordnungssymbole

Zum Vergleich des Grenzverhaltens zweier Funktionen erweisen sich die Landauschen [1]) Ordnungssymbole o und O (lies „klein-o“ bzw. ‚groß-o“) als nützlich.

Definition 2.5: Die Funktionen f und φ seien (mindestens) in einer punktierten Um- D. 2.5 gebung U von x_0 definiert, und φ sei dort von null verschieden. Gilt

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = 0$$

so schreibt man

$$f(x) = o(\varphi(x)) \text{ für } x \to x_0.$$

Ist $\frac{f}{\varphi}$ auf U beschränkt, d.h., gibt es eine positive Zahl m mit

$$\left|\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right| \leqq m \text{ für alle } x \in U,$$

so schreibt man

$$f(x) = O(\varphi(x)) \text{ für } x \to x_0.$$

Die Symbole

$$\begin{array}{lll} f(x) = o(\varphi(x)) & \text{für} & x \to +\infty, \\ f(x) = O(\varphi(x)) & \text{für} & x \to x_0 - 0 \quad \text{usw.} \end{array}$$

werden analog definiert (vgl. Fußnote auf Seite 19). Geht aus dem Zusammenhang unmißverständlich hervor, welche ‚Bewegung' der unabhängigen Variablen x betrachtet wird, so läßt man deren Angabe häufig weg, schreibt also z. B. nur $f(x) = o(\varphi(x))$. Konvergieren f und φ für eine bestimmte „Bewegung“"von x gegen null, so bedeutet $f(x) = o(\varphi(x))$, daß f„schneller „ von höherer Ordnung gegen null konvergiert als φ. Entsprechend bedeutet $f(x) = O(\varphi(x))$, daß f, mindestens so schnell „von mindestens gleicher Ordnung gegen null konvergiert wie φ. Schließlich sei noch erwähnt, daß man statt

$$f(x) - g(x) = o(\varphi(x))$$
$$f(x) = g(x) + o(\varphi(x))$$

auch

$$f(x) = g(x) + o(\varphi(x))$$

schreibt; analog für O. [1]) Edmund Landau (1877-1938), deutscher Mathematiker.

Beispiel 2.19: Nach (2.30) und der darauffolgenden Bemerkung gilt in einer punktierten Umgebung von $x_0 = 0$

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| < 1.$$

Daher ist $\sin x = O(x)$ für $x \to 0$. Weiter ist (2.31) äquivalent mit

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0,$$

und dafür schreiben wir $\sin x - x = o(x)$ für $x \to 0$ oder

$$\sin x = x + o(x) \text{ für } x \to 0.$$

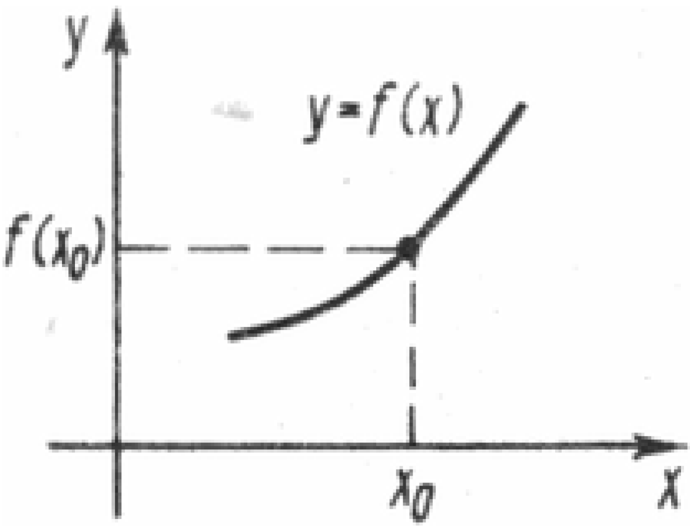

Bild 2.14.

Später werden wir sehen, daß sogar gilt

$$\sin x = x + O\left(x^3\right) \text{ für } x \to 0.$$

* Aufgabe 2.7: Was bedeutet Formel (2.32) definitionsgemäß?

3. Stetigkeit 3.1. Der Begriff der Stetigkeit

Mit dem Begriff der Stetigkeit einer Funktion f an einer Stelle x_0 will man die Vorstellung, daß das Bild von f an dieser Stelle ‚nicht abreißt"(Bild 3.1), mathematisch einfangen. Es ist naheliegend, dazu den Grenzwert von f für $x \to x_0$ mit dem Funktionswert $f(x_0)$ zu vergleichen. Demnach muß f außer in einer punktierten Umgebung von x_0 nun auch an der Stelle x_0 selbst, also in einer vollen Umgebung von x_0, definiert sein.

Definition 3.1: Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heißt an der Stelle D. 3.1 x_0 stetig, wenn gilt

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Führt man durch die Substitution $x = x_0 + h$ die neue unabhängige Variable h ein, so kann man für (3.1) offenbar auch schreiben

$$\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0).$$

Beispiel 3.1: Nach (2.29) gilt

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos 0,$$

folglich ist $f(x)=\cos x$ an der Stelle $x=0$ stetig.

Beispiel 3.2: Für die Funktion

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-\frac{1}{4}}{x-\frac{1}{2}} & \text{für} \quad x \neq \dfrac{1}{2}, \\ 2 & \text{für} \quad x=\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

gilt (s. Beispiel 2.3)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x)=1 \neq 2=f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Daher ist f an der Stelle $x=\dfrac{1}{2}$ nicht stetig (s. Bild 2.5). Für jedes $x \neq \dfrac{1}{2}$ ist f offenbar stetig.

Unter Beachtung der Definition des Grenzwertes einer Funktion erhält man die folgende ausführliche Formulierung von Definition 3.1:

D. 3.1* Definition 3.1* : Eine in einer Umgebung von x_0 definierte Funktion f heißt an der Stelle x_0 stetig, wenn für jede Folge (x_n) in $D(f)$ mit $\lim\limits_{n \rightarrow \infty} x_n=x_0$ gilt [1])

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f\left(x_n\right)=f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right).$$

Die „ $\varepsilon-\delta$-Charakterisierung“ des Grenzwertes einer Funktion (s. Satz 2.1) liefert eine entsprechende Charakterisierung der Stetigkeit: S. 3.1 Satz 3.1: Die Funktion f sei in einer Umgebung von x_0 definiert. Genau dann ist f an der Stelle x_0 stetig, wenn zu jeder (insbesondere jeder beliebig kleinen) Zahl $\varepsilon>0$ eine Zahl $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ existiert, so daß gilt

$$\left|f(x)-f\left(x_0\right)\right|<\varepsilon$$

für alle x mit $\left|x-x_0\right|<\delta$.

Zur Veranschaulichung dieses Satzes ist in Bild 2.7 nur g durch $f\left(x_0\right)$ zu ersetzen. Auf Grund von Satz 3.1 wollen wir den Begriff der Stetigkeit noch an einem Beispiel aus der Physik interpretieren.

Beispiel 3.3: Die geradlinige Bewegung einer Punktmasse wird durch die Weg-ZeitFunktion $s=s(t)$[2]) beschrieben. Zur Zeit t_0 befindet sich die Punktmasse also am Ort $s\left(t_0\right)$; diesem Ort wird sie noch beliebig nahe sein, wenn man sie nur zu einer Zeit t beobachtet, die hinreichend nahe bei t_0 gelegen ist (s. Bild 3.2). Mathematisch bedeutet das: Die Funktion $s=s(t)$ ist an der (beliebigen) Stelle t_0 stetig.

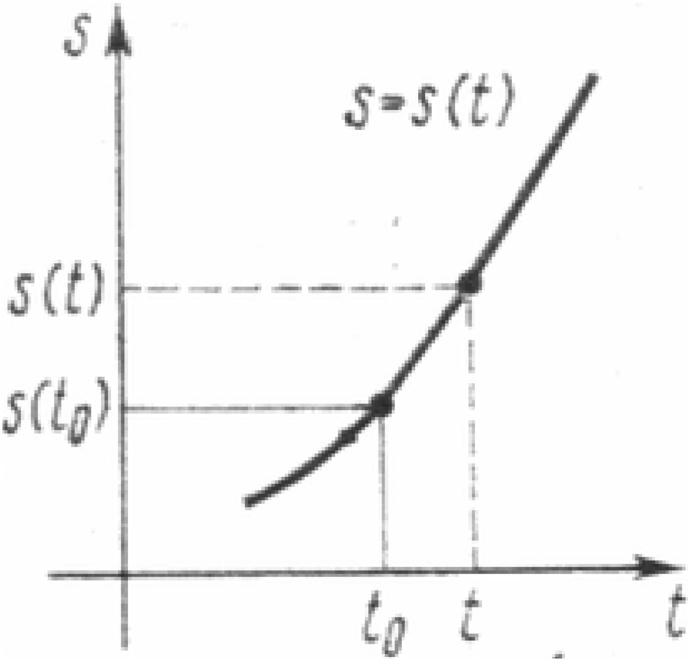

Bild 2.15.

Beispiel 3.4: Unter Verwendung des Satzes 3.1 wollen wir zeigen, daß die Funktion $f(x) = |x|$ an jeder Stelle x_0 stetig ist. Es sei ein beliebiges $\varepsilon > 0$ gegeben. Dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| \leqq |x - x_0| < \varepsilon$$

für alle x mit $|x - x_0| < \delta$, falls $\delta = \varepsilon$ gesetzt wird. Damit ist zu jedem $\varepsilon > 0$ ein geeignetes $\delta > 0$ gefunden, also die Behauptung bewiesen, d. h., es gilt

$$\lim_{x \to x_0} |x| = |x_0| \quad (x_0 \text{ beliebig}).$$

Beispiel 3.5[3]): Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad x = 0, \\ \dfrac{1}{k+1} & \text{für} \quad \dfrac{1}{k+1} < |x| \leqq \dfrac{1}{k} \quad (k = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

[1]) Die Voraussetzung „ $x_n \neq x_0$ für alle n ïst jetzt offenbar entbehrlich. [2]) In den Anwendungen bezeichnet man häufig die abhängige Variable und das Funktionssymbol mit demselben Buchstaben (hier s). [3]) Dieses Beispiel ist [10] entnommen.

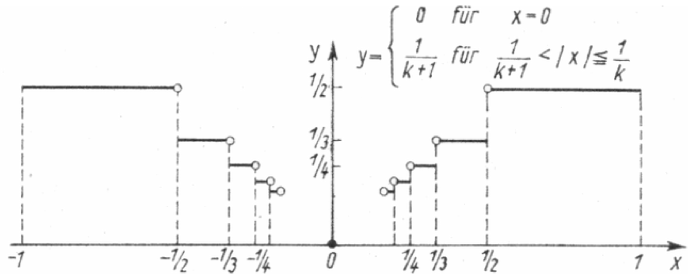

Bild 2.16.

soll auf Stetigkeit an der Stelle $x = 0$ untersucht werden. Offenbar gilt

$$0 \leqq f(x) \leqq |x| \quad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

Wegen $\lim\limits_{x\to 0} 0 = 0$ und $\lim\limits_{x\to 0} |x| = |0| = 0$ (letzteres nach (3.4) mit $x_0 = 0$) folgt aus (3.5) nach Satz 2.5

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0.$$

Da auch $f(0) = 0$ gilt, ist f an der Stelle $x = 0$ stetig. Das Bild von f besteht aus zur x-Achse parallelen Geradenstücken, die für $x \to 0$ immer kürzer werden und der x-Achse immer näher kommen (Bild 3.3). Das Verhalten von f in einer (sehr kleinen) Umgebung von $x = 0$ ist anschaulich nur unvollkommen zu erfassen. Dieses Beispiel zeigt also, daß der durch Definition 3.1 exakt festgelegte Begriff der Stetigkeit doch wesentlich über das der Anschauung Zugängliche hinausreicht.

$$\left\{\begin{array}{l} x^n : \quad a_n = b_{n-1}, \\ x^{n-1} : a_{n-1} = b_{n-2} - x_0 b_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots \\ x^1 : a_1 = b_0 - x_0 b_1, \\ x^0 : a_0 = g\left(x_0\right) - x_0 b_0, \end{array}\right\} \text{ also } \left\{\begin{array}{l} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} = a_{n-1} + x_0 b_{n-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_0 = a_1 + x_0 b_1, \\ g\left(x_0\right) = a_0 + x_0 b_0. \end{array}\right\}$$

3	9	0	2	6	-8
-1		-3	6		
2			-1	-2	
				-3	6
	3	-1	3	1	-2
	x^2	x	T.I	x	T.I

$$
\begin{array}{c|cccccc|c}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_2 & a_1 & a_0 \\
 & & x_0 b_{n-1} & x_0 b_{n-2} & \ldots & x_0 b_2 & x_0 b_1 & x_0 b_0 \\
\hline
x_0 & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} & \ldots & b_1 & b_0 & \underline{g\left(x_0\right)}
\end{array}
$$

1. Schritt		3	0[10]	1	-5	2
			6	12	26	42
	2	3	6	13	21	$\boxed{44 = g(2)}$
2. Schritt			6	24	74	
	2	3	12	37	$\boxed{95 = g'(2)}$	
3. Schritt			6	36		
	2	3	18	$\boxed{73 = \frac{g''(2)}{2!}}$		
4. Schritt			6			
	2	3	$\boxed{24 = \frac{g'''(2)}{3!}}$			
5. Schritt		$\boxed{3 = \frac{g^{(4)}(2)}{4!}}$				

[10] Man beachte, ...

$$
\begin{array}{r|cccccc l}
 & 1 & 3 & 5 & 7 & 6 & 2 & \\
 & & -1 & -2 & -3 & -4 & -2 & \\
\hline
-1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 2 & \boxed{0 = g(-1)} & \\
 & & -1 & -1 & -2 & -2 & & \\
\hline
-1 & 1 & 1 & 2 & 2 & \boxed{0 = g'(-1)} & & \\
 & & -1 & 0 & -2 & & & \\
\hline
-1 & 1 & 0 & 2 & \boxed{0 = \dfrac{g''(-1)}{2!}} & & & \\
 & & -1 & 1 & & & & \\
\hline
-1 & 1 & -1 & \boxed{3 = \dfrac{g'''(-1)}{3!} \neq 0} & & & &
\end{array}
$$