Beispiel 7.22: Wir haben gezeigt, daß die Menge R^n ein metrischer Raum ist. Also ist auch $R^1 = \mathbf{R}$, in diesem Falle geht (7.47) über in $d(x, y) = \sqrt{(x-y)^2} = |x - y|$, ein metrischer Raum.

Es sei $a \in \mathbf{R}$. Dann gilt:

$$K(a, r) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge d(a, x) < r\} = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge |a - x| < r\},$$
$$K'(a, r) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge d(a, x) \leqq r\} = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge |a - x| \leqq r\}$$

sind *Intervalle* mit dem Mittelpunkt a und der Länge $2r$. Der Begriff der Kugel fällt also im Falle $R^n = \mathbf{R}$ mit dem des Intervalls zusammen, den wir in Beispiel 7.6 ausführlich erläutert haben.

Beispiel 7.23: In Bild 7.13 haben wir für X die Menge $R^2 = \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ gewählt und sowohl eine beschränkte als auch eine nichtbeschränkte Teilmenge gezeichnet.

D.7.22 **Definition 7.22:** *X sei ein metrischer Raum mit dem Abstand d und $A \subseteqq X$. A heißt* **offene Teilmenge** *von X, wenn gilt: Für alle $x, x \in A$, existiert ein r, $r > 0$ so, daß $K(x, r) \subseteqq A$ gilt.*

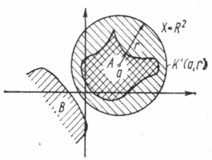

Bild 7.13.
A **beschränkte,**
B nichtbeschränkte Teilmenge des R^2

Das heißt, mit jedem x, welches zu A gehört, gehört auch eine offene Kugel um x zur Menge A. Es sei z. B. $X = \mathbf{R}$. Dann ist jedes offene Intervall (a, b) eine offene Teilmenge von X.

Mit Hilfe dieser Begriffe sind wir nun in der Lage, eine *Umgebung einer Menge* zu definieren.

D.7.23 **Definition 7.23:**

1. *Eine* **offene Umgebung** *von A ist eine offene Menge O mit $A \subseteqq O$.*
2. *Eine* **Umgebung** *von A ist jede Menge U mit $O \subseteqq U$ (O offene Umgebung von A).*
3. *Ist $A = \{x\}$, so sprechen wir von* **Umgebungen des Punktes** *x anstelle des Begriffes Umgebung der Menge $\{x\}$.*

Beispiel 7.24: Wir betrachten wieder $X = \mathbf{R}$. (a, b) sei ein beliebiges offenes Intervall. Dann gilt: Für ein beliebiges festes $\varepsilon, \varepsilon \in \mathbf{R}$, $\varepsilon > 0$, ist jede Menge $(a - \varepsilon, b + \varepsilon) = \{x \mid x \in \mathbf{R} \wedge a - \varepsilon < x < b + \varepsilon\}$ eine offene Umgebung von (a, b).

Da das abgeschlossene Intervall $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ das offene Intervall $(a - \varepsilon, b + \varepsilon)$ umfaßt, $(a - \varepsilon, b + \varepsilon) \subseteqq [a - \varepsilon, b + \varepsilon]$, ist $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ eine Umgebung von (a, b).

Das abgeschlossene Intervall $[a, a]$ können wir mit der reellen Zahl a identifizieren. Für jedes positive ε ist deshalb $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ eine offene Umgebung, $[a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ eine Umgebung des Punktes a. Man nennt diese wichtige spezielle Umgebung auch *ε-Umgebung* des Punktes a.

Abschließend erklären wir noch zwei wichtige Begriffe für Teilmengen der Menge $\mathbf{R}$ der reellen Zahlen.