10. Zahlenfolgen

Das Ziel dieses Kapitels besteht darin, für ein neues mathematisches Objekt, nämlich die Zahlenfolge, die wesentlichsten Aussagen und Eigenschaften darzulegen. Insofern besteht hier Analogie zum Kapitel 9. über Funktionen. Aber natürlich ergeben sich für das neue mathematische Objekt „Zahlenfolge“ auch Probleme, die sich von den bisher für Funktionen untersuchten grundlegend unterscheiden. Die neuen Probleme führen ihrerseits zu neuen Begriffen, Aussagen usw. Als wesentlichste Begriffe seien vorab bereits genannt: Nullfolgen, Grenzwert, Konvergenz und Häufungspunkt. Unter ihnen wiederum sind Grenzwert und Konvergenz von fundamentaler Bedeutung für das Verständnis der gesamten Differential- und Integralrechnung und damit für zahlreiche angewandte Problemstellungen. Die Beziehungen des vorliegenden Kapitels selbst zu praktischen Problemen sind jedoch nicht so unmittelbar wie die des Kapitels über Funktionen. Es hat ausgesprochenen Grundlagencharakter. Das macht sich auch in der Darlegungsweise bemerkbar. Gerade deshalb hoffen wir, mit den vorangegangenen Darlegungen beim Leser so viel Verständnis für die notwendige mathematische Kleinarbeit geweckt zu haben, daß er bereit ist, mit uns gemeinsam die folgenden Stufen der Abstraktionen Schritt für Schritt zu ersteigen.

Trotz der obigen Bemerkungen über den Grundlagencharakter dieses Kapitels haben Zahlenfolgen natürlich auch eine vielfältige Bedeutung für praktische Untersuchungen. Auf einige wird in Abschnitt 10.9. hingewiesen.

Zur Vorbereitung auf die folgenden Ausführungen empfehlen wir, das Rechnen mit Beträgen und Ungleichungen zu wiederholen (siehe Abschnitt 5.2.).

10.1. Zahlenfolgen als Spezialfall von Abbildungen und einige ihrer besonderen Vertreter

Im Beispiel 8.7 (Abschnitt 8.4.) wurden Zahlenfolgen bereits als Spezialfall von Abbildungen eingeführt. Danach sind Zahlenfolgen geordnete Paare (*n*, ɹ) reeller Zahlen. Das Wesen der Spezialisierung, die beim Übergang von Abbildungen zu Zahlenfolgen vorgenommen wurde, besteht in folgenden drei Merkmalen:

1. Der Definitionsbereich der Abbildung ist gleich $\mathbf{N}^+$, wobei wir mit $\mathbf{N}^+$ die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, … bezeichnen.
2. Die Abbildung ist eindeutig.
3. Der Wertebereich ist eine Teilmenge von R^1.

Die im Beispiel 8.7 angegebene Schreibweise bringt zwei dieser drei Merkmale zum Ausdruck. Sie ist jedoch zu umfangreich und wird daher nicht verwendet. Es ist u. a. üblich, eine Zahlenfolge allgemein durch das Symbol

$$\{a_n\},\ a_n = f(n), \tag{10.1}$$

oder konkret z. B. in der Form $\{a_n\}$, $a_n = (1 + n)^{-1}$, anzugeben. Dabei schließt diese Schreibweise ein, daß der Definitionsbereich der Funktion f gleich $\mathbf{N}^+$ ist, d. h., daß $n = 1, 2, \ldots$ gilt. Der Index n besagt, daß es sich bei a_n um das Bild des Originals n handelt. Das kommt auch allgemein in der Formel $a_n = f(n)$ bzw. konkret z. B. in $a_n = (1 + n)^{-1}$ zum Ausdruck. Da n hierbei eine beliebige natürliche Zahl größer 0 ist, nennt man a_n das *allgemeine Glied* der Zahlenfolge.