Beispiel 10.3: Die geometrische Folge $\{a_n\}$, $a_n = aq^{n-1}$ mit $a > 0$, ist für $0 < q < 1$ streng monoton fallend; dagegen ist sie für $1 < q$ streng monoton wachsend. Wir zeigen hier nur die letzte Behauptung. Wegen $1 < q$ folgt auf jeden Fall $q^{n-1} > 0$. Wird daher $1 < q$ mit q^{n-1} und danach mit $a > 0$ multipliziert, so ergibt sich $aq^{n-1} < aq^n$ oder $a_n < a_{a+1}$, $n = 1, 2, \ldots$

Beispiel 10.4: Die Folge $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1}{n}$, ist streng monoton fallend. Tatsächlich, es muß gezeigt werden, daß $a_n > a_{n+1}$ oder $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, gilt. Letzteres ist aber eine unmittelbare Folge aus der evidenten Ungleichung $n + 1 > n$, $n = 1, 2, \ldots$

Aufgabe 10.4: Man betrachte eine geometrische Folge $\{a_n\}$, $a_n = aq^{n-1}$, mit $a < 0$ und untersuche – ähnlich wie in Beispiel 10.3 – ihr Monotonieverhalten. *

Aufgabe 10.5: Ist die Folge $\{a_n\}$, $a_n = -\dfrac{4n - 15}{n^2}$, monoton? *

Mit der Zahlenfolge $\{a_n\}$, $a_n = 2n + (-1)^n$, weisen wir auf eine zwar monoton wachsende, jedoch nicht streng monoton wachsende Folge hin.

Aufgabe 10.6: Für die Zahlenfolge $\{a_n\}$, $a_n = cn + \dfrac{7}{3}(-1)^n$, untersuche man, ob es einen Wert c gibt, für den $\{a_n\}$ zwar monoton, jedoch nicht streng monoton wachsend ist. Außerdem prüfe man, ob es Werte c gibt, für die $\{a_n\}$ streng monoton wachsend ist. *

Zahlenfolgen können genau wie Funktionen beschränkt sein.

Definition 10.2: *Eine Zahlenfolge $\{a_n\}$ heißt* **beschränkt**, *wenn es eine endliche Konstante C derart gibt, daß* D.10.2

$$|a_n| \leqq C \quad \text{für alle} \quad n = 1, 2, \ldots;$$

dabei heißt C **Schranke** *der Folge $\{a_n\}$. Eine Folge heißt* **nach oben** *bzw.* **nach unten beschränkt**, *wenn es eine endliche Konstante K bzw. k derart gibt, daß*

$$a_n \leqq K \quad \text{bzw.} \quad a_n \geqq k \quad \textit{für alle} \quad n = 1, 2, \ldots$$

gilt; dabei wird K **obere Schranke** *und k* **untere Schranke** *von $\{a_n\}$ genannt.*

Die folgenden konkreten Zahlenfolgen mögen diese Begriffe erläutern.

Beispiel 10.5: Die Folge $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{1 - 3n}{n}$, ist beschränkt. Es gilt nämlich für alle $n = 1, 2, \ldots$

$$|a_n| = \left|\frac{1 - 3n}{n}\right| = \left|3 - \frac{1}{n}\right| < 3.$$

Daher ist jede Zahl $C \geqq 3$ eine Schranke dieser Folge. Außerdem überzeugt man sich wegen $a_n = \dfrac{1}{n} - 3$ leicht, daß jede Zahl $k \leqq -3$ eine untere Schranke und jede Zahl $K \geqq -2$ eine obere Schranke der Zahlenfolge ist.

Beispiel 10.6: Eine geometrische Folge $\{a_n\}$, $a_n = aq^{n-1}$, ist für $-1 \leqq q \leqq 1$ immer beschränkt, und jede Zahl $C \geqq |a|$ ist eine Schranke dieser Folge. Tatsächlich, für $q \in [-1, 1]$ gilt nämlich $|q|^{n-1} \leqq 1$, so daß $|a_n| \leqq |a|$ für alle $n = 1, 2, \ldots$ folgt.