Nullfolgen sind; im Falle von (10.14) sind $P(n)$ und $R(n)$ gewisse Polynome, wobei $R(n)$ höheren Grades als $P(n)$ ist.

Unter den Eigenschaften von Nullfolgen geben wir hier ohne Beweis folgende an:

1. Jede Nullfolge ist beschränkt; die Umkehrung gilt jedoch im allgemeinen nicht.
2. Sind $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ Nullfolgen, so sind auch

$$\{a_n \pm b_n\}, \quad \{a_n b_n\} \quad \text{und} \quad \{ca_n\}$$

Nullfolgen; im letzten Falle ist c eine beliebige Konstante.

Der Quotient zweier Nullfolgen $\{a_n\}$ und $\{b_n\}$ kann, muß jedoch nicht wieder eine Nullfolge sein. Wenn jedoch auch $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ eine Nullfolge ist, dann nennt man $\{a_n\}$ *im Vergleich zu* $\{b_n\}$ *eine Nullfolge höherer Ordnung.*

* *Aufgabe 10.9:* Es sei $1 > q_1 > q_2 > 0$. Man vergleiche die beiden Nullfolgen $\{a_n\}$, $a_n = q_1^n$, und $\{b_n\}$, $b_n = q_2^n$, und prüfe, ob eine von höherer Ordnung im Vergleich zur anderen ist.

S.10.1 **Satz 10.1:** *Jede Teilfolge einer Nullfolge ist ebenfalls eine Nullfolge.*

S.10.2 **Satz 10.2:** *Wenn $\{a_n\}$ eine Nullfolge ist und für $\{b_n\}$ eine natürliche Zahl N_1 derart existiert, daß*

$$|b_n| \leqq |a_n| \quad \textit{für alle} \quad n \geqq N_1,$$

dann ist auch $\{b_n\}$ eine Nullfolge.

* *Aufgabe 10.10:* Man beweise Satz 10.1.

10.4. Konvergenzbegriff für Zahlenfolgen

Dieser Abschnitt ist dem für die gesamte Differential- und Integralrechnung fundamentalen Begriff der Konvergenz gewidmet. Dabei wird er hier zunächst im Zusammenhang mit Zahlenfolgen behandelt. Später werden wir ihm in den vielfältigsten Beziehungen bei Funktionen begegnen.

Im allgemeinen Sprachgebrauch bedeutet Konvergenz soviel wie sich an etwas annähern. In eben diesem Sinne wird der Begriff „Konvergenz" auch in der Mathematik verwendet. Für Zahlenfolgen bedeutet Konvergenz speziell, daß es eine gewisse Zahl a gibt, an die sich die Glieder der Folge annähern. Das Maß für diese Annäherung ist der Abstand zwischen der Zahl a und den Gliedern a_n der Zahlenfolge $\{a_n\}$. Er wird ausgedrückt durch die Zahl $|a_n - a|$.

D.10.4 **Definition 10.4:** *Eine (konstante) endliche Zahl a heißt* **Grenzwert** *der Zahlenfolge $\{a_n\}$, und diese Folge heißt* **konvergent** *gegen den Grenzwert a, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ derart gibt, daß*

$$|a_n - a| < \varepsilon \quad \textit{für alle} \quad n \geqq N(\varepsilon) \tag{10.15}$$

gilt. Man schreibt für die Konvergenz von $\{a_n\}$ gegen a

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \tag{10.16}$$

oder

$$a_n \to a \quad \textit{für} \quad n \to \infty. \tag{10.17}$$