nicht jedoch die Kenntnis seines konkreten Wertes voraussetzen. Dennoch erweist es sich, daß die Eigenschaften und die Rechenregeln für Zahlenfolgen es in einer Reihe von Fällen gestatten, Grenzwerte zu berechnen. Schon hier sei bemerkt, daß es keine allgemeingültige Methode zur Ermittlung des Grenzwertes einer konvergenten Zahlenfolge gibt. Hierzu ist vielmehr die Spezifik der jeweils vorliegenden Folge auszunutzen. Das Anliegen dieses Abschnittes besteht auch darin, aus den Eigenschaften und insbesondere aus den Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen erste Hinweise für die Berechnung der Grenzwerte abzuleiten.

Untersuchen wir zunächst, ob eine konvergente Zahlenfolge die in Abschnitt 10.2. genannten einfachsten Eigenschaften der Monotonie und Beschränktheit besitzt.

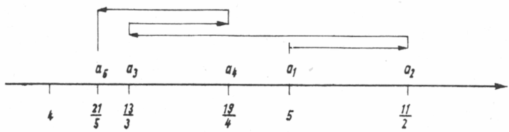

Bild 10.2. Darstellung der konvergenten aber nicht monotonen Zahlenfolge $\{a_n\}$, $a_n = \frac{1}{n}[2 + (-1)^n + 4n]$

Beispiel 10.12: Die Zahlenfolge $\{a_n\}$, $a_n = \dfrac{2 + (-1)^n + 4n}{n}$, ist konvergent gegen den Grenzwert 4. Davon kann man sich überzeugen, indem man analoge Betrachtungen wie in Beispiel 10.8 anstellt. Die Konvergenz dieser Folge ist jedoch nicht monoton. Man prüft nämlich leicht nach, daß einerseits $a_{2k-1} < a_{2k}$ und andererseits $a_{2k} > a_{2k+1}$ für beliebige $k = 1, 2, \ldots$ gilt (vgl. Bild 10.2).

Zahlenfolgen von der in Beispiel 10.12 genannten Art kann man beliebig viele konstruieren. Neben diesen gibt es aber auch Zahlenfolgen, deren Konvergenz in anderer Weise erfolgt.

Aufgabe 10.14: Man nehme folgende Konvergenzaussagen als bewiesen hin *

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 4 \quad \text{für} \quad a_n = \frac{4n+1}{n}, \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = 4 \quad \text{für} \quad b_n = \frac{4n-1}{n},$$

$$\lim_{n\to\infty} c_n = 4 \quad \text{für} \quad c_n = \frac{4n+(-1)^n}{n}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

und zeige, daß $\{a_n\}$ streng monoton fallend, $\{b_n\}$ streng monoton wachsend und $\{c_n\}$ nicht monoton ist.

Verallgemeinert man die Ergebnisse von Beispiel 10.12 und Aufgabe 10.14, so kommt man zu der Schlußfolgerung, daß konvergente Zahlenfolgen monoton sein können, es jedoch nicht sein müssen. Mit anderen Worten, aus der Konvergenz einer Zahlenfolge kann man im allgemeinen nicht deren Monotonie schlußfolgern.

Bezüglich der Beschränktheit kann dagegen folgender Satz bewiesen werden.

Satz 10.5: *Jede konvergente Zahlenfolge $\{a_n\}$ ist beschränkt.* **S.10.5**

Zum Beweis bezeichnen wir den Grenzwert von $\{a_n\}$ mit a. Dann gibt es für eine beliebig fixierte Zahl $\varepsilon > 0$ eine natürliche Zahl $N(\varepsilon)$ derart, daß (10.15) gilt. Somit folgt $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$ oder