$a^2 = d + a$ oder $a^2 - a - d = 0$. Diese quadratische Gleichung hat die beiden Lösungen $a_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+4d}$, von denen die Zahl $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{1+4d} < 0$ als Grenzwert unserer Folge nicht in Betracht kommt, weil alle $a_n > 0$ und damit auch $a \geqq 0$ gelten muß. Also folgt für den Grenzwert $a = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{1+4d}$.

* *Aufgabe 10.20:* Man ermittle den Grenzwert der konvergenten Zahlenfolge $\{a_n\}$, $a_n = \frac{q^n}{n!}$, $q > 1$.

In einer Reihe von Fällen gelingt es auch, Aussagen über die Konvergenz einer Folge einschließlich ihres Grenzwertes zu erhalten, indem man sie mit bereits untersuchten Folgen vergleicht. Grundlage hierfür ist der

S.10.11 **Satz 10.11** *(Vergleichskriterium): Eine Folge $\{b_n\}$ ist konvergent gegen den Grenzwert a, wenn es zwei andere Zahlenfolgen $\{a_n\}$ und $\{c_n\}$ derart gibt, daß*

$$1.\ \lim_{n\to\infty} a_n = a, \qquad \lim_{n\to\infty} c_n = a$$

und

$$2.\ a_n \leqq b_n \leqq c_n, \qquad n = 1, 2, \ldots,$$

gilt.

Beispiel 10.17: Es ist die Folge $\{a_n\}$, $a_n = \frac{\sqrt{n^2 + (-1)^n n}}{n}$, zu untersuchen. Um das Vergleichskriterium anzuwenden, muß a_n „vorsichtig", d. h. unter geringfügigen Änderungen nach oben und unten, derart abgeschätzt werden, daß sich dabei Folgen ergeben, die gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. Im gegebenen Falle bieten sich dafür die Abschätzungen

$$a_n = \frac{\sqrt{n^2 + (-1)^n n}}{n} = \sqrt{1 + (-1)^n \frac{1}{n}} \leqq \sqrt{1 + \frac{1}{n}} < 1 + \frac{1}{n}$$

sowie

$$a_n = \sqrt{1 + (-1)^n \frac{1}{n}} \geqq \sqrt{1 - \frac{1}{n}} > 1 - \frac{1}{n}$$

an. Damit erhalten wir $b_n < a_n < c_n$ mit $b_n = 1 - \frac{1}{n}$ und $c_n = 1 + \frac{1}{n}$. Beachtet man, daß offensichtlich $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1$ gilt, so liefert Satz 10.11 für die gegebene Folge den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$.

Die bisher genannten Konvergenzkriterien sind an spezielle Eigenschaften gebunden, die nicht jede konvergente Folge besitzen muß. Dagegen hat das folgende Kriterium allgemeinen Charakter in dem Sinne, daß es an keinerlei konkrete Eigenschaften wie Monotonie oder andere gebunden ist. Es wurde von B. Bolzano und A. L. Cauchy formuliert und ist von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Analysis sowie auch für die modernen Gebiete wie z. B. die Funktionalanalysis (siehe Bd. 22). Seine Grundidee basiert darauf, daß für eine konvergente Folge $\{a_n\}$ mit dem Grenzwert a die Relation (10.15) gilt. Diese kann auch wie folgt geschrieben werden:

$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{oder} \quad a_n \in U_\varepsilon(a) \quad \text{für alle} \quad n \geqq N(\varepsilon).$$