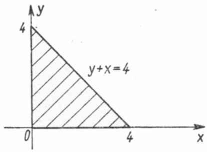

Bild L.5.2

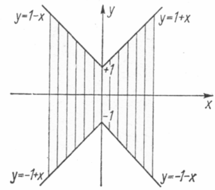

Bild L.5.3

c) Die Punkte liegen im Inneren und auf dem Rande des schraffierten Dreiecks (Bild L.5.2).

5.8: a) Fallunterscheidung: 1. Für $2x + 3 \geqq 0$ folgt $-\frac{3}{2} \leqq x < 0$, 2. Für $2x + 3 \leqq 0$ folgt $-2 < x < -\frac{3}{2}$, insgesamt $-2 < x < 0$. b) Fallunterscheidung wie in a) ergibt $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = -\frac{11}{2}$.
c) Wir ermitteln durch Fallunterscheidung zunächst folgende Intervalle: 1. Für $x \geqq 4$ folgt $x \geqq 3 + \sqrt{13}$; 2. Für $-1 < x \leqq 4$ folgt $-1 < x \leqq 2$; 3. Für $x < -1$ folgt $x \leqq -2$; also insgesamt gilt die Ungleichung für folgende x: $x \leqq -2$; $-1 < x \leqq 2$; $3 + \sqrt{13} \leqq x$.

d) $|x| + |x-1| + |x-2| = \begin{cases} 3x - 3 & \text{für} \quad x \geqq 2 \\ x + 1 & \text{für} \quad 1 \leqq x \leqq 2 \\ -x + 3 & \text{für} \quad 0 \leqq x \leqq 1 \\ -3x + 3 & \text{für} \quad x \leqq 0 \end{cases}$ Die Ungleichung gilt für $x > 3$ und $x < -1$.

5.9: a) $|x + y| < 1$ entspricht $-1 < x + y < +1$ oder $-1 - x < y < 1 - x$. c) Fallunterscheidung (Bild L.5.3): 1. $x \geqq 0$; $|y| \leqq 1 + x$; $-(1 + x) \leqq y \leqq 1 + x$. 2. $x \leqq 0$; $|y| \leqq 1 - x$; $-(1 - x) \leqq y \leqq 1 - x$.

5.10: Fallunterscheidung: 1. $a < b$; $\frac{a + b + |b - a|}{2} = \frac{2b}{2} = b$; 2. $a > b$; $\frac{a + b + |b - a|}{2} = \frac{2a}{2} = a$. Die 2. Beziehung ist analog zu beweisen.

5.11: a) $13(1 + i)$; b) $1 + 2i$; c) $3 + 2i$; d) $(1 + i)^8 = [(1 + i)^2]^4 = (2i)^4 = 16$; e) $4(1 + i)$, f) $\sqrt{i} = a + bi$; $i = (a + bi)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \to a^2 - b^2 = 0$; $2ab = 1$, $a = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\sqrt{i} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; g) $\sqrt{-5 + 12i} = a + bi$; $a^2 - b^2 = -5$, $2ab = 12$; $a = \pm 2$, $b = \pm 3$; $\sqrt{-5 + 12i} = \pm(2 + 3i)$. Man entwickle die Lösungen von f) und g) über die Formel (5.12)!

5.12: a) $e^{i3\pi} = \cos 3\pi + i \sin 3\pi = -1$; b) $e^{-i\frac{\pi}{3}} = \cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}\,i$;
c) $e^{i\frac{11}{6}\pi} = \cos\frac{\pi}{6} - i \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i$; d) $e^{i\left(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi\right)} = -i$.

5.13: a) $r = 2$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$; $2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2}\right) = 2\,e^{i\frac{\pi}{2}}$; b) $r = \sqrt{2}$, $\varphi = \frac{5}{4}\pi$ ($\sim 225°$); $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{4}\pi + i \sin\frac{5}{4}\pi\right) = \sqrt{2}\,e^{i\frac{5}{4}\pi}$; c) $r = 2\sqrt{3}$, $\varphi = 330°$; $2\sqrt{3}(\cos 330° + i \sin 330°) = 2\sqrt{3}\,e^{i\frac{11}{6}\pi}$. Man vergleiche das Ergebnis mit dem von 5.12c)!

5.14: a) $2(\cos 60° + i \sin 60°) = 1 + \sqrt{3}i$; b) $2\sqrt{3}(\cos 300° + i \sin 300°) = \sqrt{3} - 3i$.