schaften 1. und 2. von a_* bzw. a^*. Dann gilt also bei beliebigem $\varepsilon > 0$ die Relation $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ oder $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqq N(\varepsilon)$, womit die Konvergenz der Folge $\{a_n\}$ gezeigt und die Behauptung bewiesen ist.

10.23: Es genügt, nur positive $\varepsilon < 2$ zu betrachten. Bildet man für sie das Intervall $I_\varepsilon = (1 - \varepsilon, 1)$, so gilt sowohl $I_\varepsilon \subset M$ als auch $I_\varepsilon \subset U_\varepsilon(1)$. Daher ist (10.34) für alle $a' \in I_\varepsilon$ erfüllt.

10.24: Da der Faktor $1 + (-1)^n$ beschränkt bleibt und der zweite Faktor $\dfrac{4n-3}{n^2}$ die Glieder einer Nullfolge bilden, konvergiert $\{a_n\}$ gegen Null. Obwohl unendlich viele Glieder der Folge $\{a_n\}$ selbst Null sind, ist der Grenzwert Null dennoch Häufungspunkt der gegebenen Folge, denn gleichzeitig sind unendlich viele ihrer Glieder (nämlich a_{2k}, $k = 1, 2, \ldots$) verschieden vom Grenzwert.

Für die Folge $\{b_n\}$ kann man nicht so einfach wie für die Folge $\{a_n\}$ auf Konvergenz schließen. Deshalb untersuchen wir zunächst, ob $\{b_n\}$ überhaupt beschränkt ist. Es ergibt sich hierbei

$$|b_n| \leqq 2\frac{4n-3}{n} = 8 - \frac{6}{n} < 8. \tag{L.10.2}$$

Also ist $\{b_n\}$ beschränkt, folglich existieren b_* und b^*. Zu ihrer Ermittlung werden zunächst solche Teilfolgen von $\{b_n\}$ betrachtet, für die der Faktor $1 + (-1)^n$ eine einfache Form annimmt. Das ist für $\{b_{2k}\} \subset \{b_n\}$ und $\{b_{2k-1}\} \subset \{b_n\}$ der Fall ($k = 1, 2, \ldots$). Tatsächlich, für sie erhält man

$$b_{2k} = [1 + (-1)^{2k}]\frac{8k-3}{2k} = \frac{8k-3}{k} \quad \text{bzw.} \quad b_{2k-1} = [1 + (-1)^{2k-1}]\frac{8k-4-3}{2k-1} = 0,$$

woraus $\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k} = 8$ und $\lim\limits_{k\to\infty} b_{2k-1} = 0$ folgt. Wegen (L.10.2) können wir aber auch gleichzeitig schlußfolgern, daß $b^* = 8$ gilt. In gleicher Weise folgt aus $b_n = [1 + (-1)^n]\dfrac{4n-3}{n} \geqq 0$ die Relation $b_* = 0$. Nun überprüft man leicht, daß von den beiden Werten b_* und b^* nur letzterer auch Häufungspunkt der Folge $\{b_n\}$ ist.

10.25: Mit $x_{n+1} = x_n - \dfrac{x_n^2 - 2}{2x_n}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ergibt sich

$$x_1 = \frac{14}{10} - \frac{\frac{196}{100} - \frac{200}{100}}{\frac{14}{5}} = \frac{99}{70} = 1{,}414286, \qquad x_2 = \frac{19601}{13860} = 1{,}414214.$$