und daraus durch Addition von $p \cdot q$ auf beiden Seiten

$$p \cdot s + p \cdot q < q \cdot r + p \cdot q$$

oder

$$p \cdot (q + s) < q \cdot (p + r).$$

Wir multiplizieren beide Seiten mit $\frac{1}{(q + s) \cdot q}$ und erhalten die Behauptung

$$\frac{p}{q} < \frac{p + r}{q + s}.$$

Man entwickle hierzu den Beweis für die rechte Ungleichung!

3. Es gilt die *Bernoullische Ungleichung*:

$$(1 + a)^n > 1 + n \cdot a \quad \text{für} \quad a > -1, \quad a \neq 0, \quad n \geqq 2, \quad \text{ganz}. \tag{5.3}$$

Der Beweis erfolgt durch vollständige Induktion (siehe 4.3.):

I. Induktionsbeginn für $n = 2$:

$$(1 + a)^2 = 1 + 2 \cdot a + a^2 > 1 + 2 \cdot a, \quad \text{da } a^2 > 0.$$

II. Mit der Induktionsannahme ist für $n = k$:

$$(1 + a)^k > 1 + k \cdot a.$$

III. Beide Seiten werden mit $1 + a > 0$ multipliziert, das ergibt

$$(1 + a)^{k+1} > (1 + k \cdot a) \cdot (1 + a)$$

oder

$$(1 + a)^{k+1} > 1 + (k + 1) \cdot a + k \cdot a^2 > 1 + (k + 1) \cdot a,$$

da $k \cdot a^2 > 0$ ist.

IV. Die Ungleichung gilt auch für $n = k + 1$ und somit für alle natürlichen $n \geqq 2$. ■

* *Aufgabe 5.4:* Beweisen Sie die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung*

$$(a \cdot b + c \cdot d)^2 \leqq (a^2 + c^2) \cdot (b^2 + d^2).$$

* *Aufgabe 5.5:* Gegeben sind zwei Zahlen a und b mit $0 < a \leqq b$.

Es ist $A = \frac{1}{2} \cdot (a + b)$ das arithmetische Mittel von a und b,

$G = \sqrt{ab}$ das geometrische Mittel von a und b und

$H = \frac{2\,ab}{a + b}$ das harmonische Mittel von a und b

Beweisen Sie die Ungleichungskette: $a \leqq H \leqq G \leqq A \leqq b$.

* *Aufgabe 5.6:* Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$(1 + a)^n < \frac{1}{1 - na} \quad \text{für} \quad n \geqq 1, \text{ ganz}, \quad -1 < a < \frac{1}{n}, \quad a \neq 0.$$

* *Aufgabe 5.7:* Für welche x gilt

a) $\frac{1}{x - 3} < 1$; b) $\frac{x - 4}{2x^2 - 7x + 5} > 0$?

c) Man bestimme die Punkte der x,y-Ebene, für die gilt:

$y + x \leqq 4 \wedge x \geqq 0 \wedge y \geqq 0$.