Die schrittweise Lösung dieses linearen Gleichungssystems, beginnend mit der ersten Gleichung, liefert für $\hat{P}_4(x)$ die Koeffizienten $\hat{c}_0 = 115$, $\hat{c}_1 = 117$, $\hat{c}_2 = 40$, $\hat{c}_3 = 10$, $\hat{c}_4 = 2$, und wir erhalten $\hat{P}_4(x) = 115 + 117(x-4) + 40(x-4)(x-3) + 10(x-4)(x-3)(x-1) + 2(x-4)(x-3) \times (x-1)x$. Löst man nun sowohl hier als auch in $P_4(x)$ alle Klammern auf und ordnet nach wachsenden Potenzen von x, so überzeugt man sich davon, daß tatsächlich $P_4(x) = \hat{P}_4(x) = 7 + 3x - 2x^2 - 6x^3 + 2x^4$, $x \in R^1$, gilt.

9.17: Zunächst bildet man das Differenzenschema (siehe Rechenschema L.9.2). Ihm entnimmt man die erforderlichen Differenzen. Dabei liegt die Besonderheit vor, daß $\Delta^5 y = 0$ ist; die Ursache hierfür ist darin zu sehen, daß die 6 Stützpaare zu einem Polynom von nur viertem Grade gehören. Beachtet man weiter, daß im gegebenen Falle $h = 1$ ist, so ergibt sich $P_4(x) = 73 - 63(x+2) + 30(x+2)(x+1) - 10(x+2)(x+1)x + 2(x+2)(x+1)x(x-1)$.

Rechenschema L.9.2

x_i	y_i	$\Delta^1 y$	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
-2	73					
		-63				
-1	10		60			
		-3		-60		
0	7		0		48	
		-3		-12		0
1	4		-12		48	
		-15		36		
2	-11		24			
		9				
3	-2					

9.18: Die Behauptung ist bewiesen, wenn man zeigen kann, daß die Abbildung nicht eindeutig ist. Das ergibt sich aber aus der Periodizität der Funktion $g(t) = \sin t$, $t \in R^1$. Hiernach gehören nämlich z. B. alle Paare $(1, 2k\pi)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, zu der Abbildung. Also ist sie nicht eindeutig.

9.19: Da $g(\alpha) = r \cos \alpha$, $\alpha \in (0, \pi)$, eine eineindeutige Funktion ist, folgt sofort, daß mit (9.72) eine Funktion gegeben ist. Berücksichtigt man, daß $\sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ für $\alpha \in (0, \pi)$ gilt, so kann die durch (9.72) gegebene Funktion auch durch $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $x \in (-r, r)$, ausgedrückt werden. Ihr Graph ist der Halbkreis, der in der unteren Halbebene liegt und den Radius r sowie den Punkt $(x, y) = (0, 0)$ zum Zentrum hat. Setzt man nun in $y = -\sqrt{r^2 - x^2}$ den Ausdruck für x aus (9.73) ein, so erhält man nach entsprechenden Umformungen den in (9.73) für y gegebenen Term. Also ist durch (9.72) und (9.73) tatsächlich die gleiche Funktion gegeben.

9.20: Das Gleichgewicht muß für die obere Rolle hergestellt werden. An ihr greifen die Kraft $\frac{Q}{2}$ über den Radius R, die gleiche Kraft über den Radius r sowie die Kraft P über den Radius R an. Die beiden letzten wirken der ersten entgegen. Deshalb muß nach dem Hebelgesetz gelten $\frac{q}{2} R = \frac{q}{2} r + pR$ oder

$$p = f(q, r, R) \quad \text{mit} \quad f(q, r, R) = \frac{(R-r)\,q}{2R}, \quad R, r, q > 0.$$

9.21: Das Bild 9.20 enthält schon alle notwendigen Bezeichnungen. Ihm entnehmen wir unter Beachtung der Symmetrie des Problems zunächst

$$l = 2(\widehat{AB} + \widehat{BC} + \overline{CE} + \widehat{EF}). \tag{L.9.1}$$

Weiter folgt durch entsprechende geometrische Betrachtungen $\widehat{AB} = \frac{\pi}{2} R$, $\widehat{BC} = \alpha R$, $\widehat{EF} = \left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) r$ sowie $\overline{CE} = \sqrt{d^2 - (R-r)^2}$. Außerdem kann man zeigen, daß $\alpha = \arcsin \frac{R-r}{d}$. Werden nun die gefundenen Ausdrücke in (L.9.1) eingesetzt, so ergibt sich die gesuchte Funktion zu $l = f(d, r, R)$ mit $f(d, r, R) = \pi(R + r) + 2(R - r) \arcsin \frac{R-r}{d} + 2\sqrt{d^2 - (R-r)^2}$. Der